

Neuartige Verwirklichung von elektrischen n-Toren

von

EBERHARD KIENZLE

aus Esslingen/N.

1969 № 274

NEUARTIGE VERWIRKLICHUNG

VON ELEKTRISCHEN n - TOREN

Der Technischen Fakultät der
Universität Erlangen-Nürnberg

zur Erlangung des Grades

D O K T O R - I N G E N I E U R

vorgelegt von

Eberhard Kienzle

Erlangen, 1969



Als Dissertation genehmigt von der
Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 25. 4. 1969

Tag der Promotion: 25. 7. 1969

Dekan: Prof. Dr. rer. nat. B. Ilchner

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen

Prof. Dr.-Ing. H. W. Schüssler

Meiner Frau





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546202_0042

INHALT

Zusammenstellung der verwendeten Symbole und Abkürzungen	5
EINFÜHRUNG	7
TEIL I: GRUNDLAGEN UND SÄTZE AUS DER NETZWERKTHEORIE UND DER MATRIZENRECHNUNG	8
1. Vorbemerkungen	8
2. Matrizenbeschreibungen von n-Toren	9
2.1. Die allgemeinste Beschreibung	9
2.2. Die Impedanzmatrix und die Admittanzmatrix	10
2.3. Die Hybridmatrix	10
2.4. Die Streumatrix	12
3. Realisierungsbedingungen	13
3.1. Begriff und Erläuterung der Realisierbarkeit	13
3.2. Realisierungsbedingungen für die Impedanz- und Admittanzmatrix	13
3.3. Realisierbarkeitsbetrachtungen für die Hybridmatrix	15
4. Weitere wichtige Eigenschaften von Immittanz- und Hybridmatrizen realisierbarer Netzwerke	16
5. Transformationen von positiv reellen Matrizen und Hybridmatrizen	23
5.1. Vorbemerkungen	23
5.2. Die Kongruenztransformation und ihre Anwen- dung auf konstante, symmetrische Matrizen	23
5.3. Anwendung der Kongruenztransformation auf die Immittanzmatrizen	27
5.4. Anwendung der Kongruenztransformation auf die Hybridmatrix	30
5.5. Die Gyration und ihre netzwerktheoretische Interpretation	39
6. Eine zweckmäßige Darstellungsweise partitio- nierter Matrizen	44

TEIL II: VERFAHREN ZUR SYNTHESE VON n-TOREN ANHAND IHRER IMMITTANZMATRIX	48
1. Vorbemerkungen	48
2. Das erste Syntheseverfahren: die Erweiterung des Unbehauen-Prozesses für Zweipole auf n-Tore	48
2.1. Überblick	48
2.2. Bestimmung der Entwicklungsstellen	50
2.3. Gradreduktion von $Z_1(p)$ durch Entwicklung einer Reaktanzschaltung	53
2.3.1. Entwicklungsstelle auf dem Rand	53
2.3.2. Entwicklungsstelle im Innern des ersten Quadranten	66
2.4. Äquivalenztransformation der in Abschn. II.2.3. gewonnenen Schaltungen	86
2.4.1. Entwicklungsstelle auf dem Rand	87
2.4.2. Entwicklungsstelle im Innern des ersten Quadranten	95
3. Das zweite Syntheseverfahren: der Realisierungs- prozeß von Duffin, Hazony und Morrison und eini- ge daraus abgeleitete Varianten	113
3.1. Überblick	113
3.2. Das Syntheseverfahren von Duffin, Hazony und Morrison	114
3.3. Zwei Varianten zum Verfahren von Duffin, Hazony und Morrison	124
3.3.1. Die erste Variante	124
3.3.2. Die zweite Variante	132
3.4. Äquivalenztransformation der in Abschn. II.3.3. gewonnenen Reaktanzschaltungen	136
3.5. Eine alternative Methode der Realteil- abspaltung und Anwendungsmöglichkeiten	143
SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS	154
Lebenslauf	156

Zusammenstellung der verwendeten Symbole und Abkürzungen

$p = \sigma + j\omega \quad (j = \sqrt{-1})$	komplexer Frequenzparameter
$p^* = \sigma - j\omega$	zu p konjugiert komplexe Zahl
v	Spannung (Laplacetransformierte)
i	Strom (Laplacetransformierte)
R	Ohmscher Widerstand ()
L	Induktivität ()
C	Kapazität ()
T	idealer Übertrager ()
r_A	Rang einer Matrix $\underline{A}$
$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [a_1]_n$	Spaltenvektor mit n Elementen, "n-Vektor"
$\underline{a}^T = [a_1, \dots, a_n] = [a_1]_n^T$	Zeilenvektor mit n Elementen, Transponierte von $\underline{a}$
$\underline{v}$	Spannungsvektor
$\underline{i}$	Stromvektor
$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1k} \\ \vdots \\ A_{mk} \end{bmatrix}_n$	rechteckige Matrix mit m Zeilen und n Spalten (d.h. $m \cdot n$ Elementen), "(m,n)-Matrix"
$\underline{A}^T = \begin{bmatrix} A_{k1} \\ \vdots \\ A_{kn} \end{bmatrix}_m$	Transponierte von $\underline{A}$
$\underline{A}^{-1}$	Inverse von $\underline{A}$
$\underline{A}_{adj}$	zu $\underline{A}$ adjungierte Matrix
$\det \underline{A}$	Determinante von $\underline{A}$
$\underline{A} = \left[\begin{array}{c c} \begin{matrix} n_1 & n_2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix} \end{array} \right]_{\begin{matrix} n_3 \\ n_4 \end{matrix}}$	rechteckige Matrix, beliebig partitioniert, mit Dimensionsbezeichnungen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \overset{n_1}{\underline{\underline{A}}_{11}} & \overset{n_2}{\underline{\underline{A}}_{12}} \\ \underline{\underline{A}}_{21} & \underline{\underline{A}}_{22} \end{bmatrix}^{n_1} = \begin{bmatrix} \overset{n_1}{\underline{\underline{A}}_{11}} & \overset{n_2}{\underline{\underline{A}}_{12}} \\ \underline{\underline{A}}_{21} & \underline{\underline{A}}_{22} \end{bmatrix}$$

quadratische Matrix, symmetrisch
partitioniert, mit Dimensionsbe-
zeichnungen

Z

Impedanzmatrix

Y

Admittanzmatrix

H

Hybridmatrix

T

konstante Transformationsmatrix

P

Polresiduenmatrix

1_n

Einheitsmatrix n-ter Ordnung

Re...

Realteil von ...

Im...

Imaginärteil von ...

PRF

positiv reelle Funktion

PRM

positiv reelle Matrix

pd

positiv definit

psd

positiv semidefinit

nsd

negativ semidefinit

EINFÜHRUNG

Das Problem der n-Tor-Synthese anhand vorgegebener Matrizen ist in allgemeiner Form schon Anfang der fünfziger Jahre gelöst worden. Die wesentlichsten Beiträge hierzu lieferten damals Bayard [1], Oono [2], Bélévitch [3], Tellegen [4] und McMillan [5], um nur einige Namen zu nennen. Viele weitere Arbeiten zu diesem Fragenkreis sind bis heute gefolgt. Auch die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Synthese von Schaltungen mit n Toren. Es werden darin neue Syntheseverfahren dargelegt, denen gemeinsam ist, daß sie von der Impedanzmatrix ausgehen und zu kanonischen Schaltungen¹⁾ führen, die alle in irgendeiner Weise Erweiterungen entweder der Zweipolschaltung von Brune [6] oder der Zweipolschaltung von Unbehauen [7] auf n-Tore darstellen. Bei einem der angegebenen Verfahren ist unter bestimmten Voraussetzungen die Einsparung von idealen Übertragern gegenüber anderen kanonischen Verfahren möglich.

Die Arbeit ist in zwei Hauptteile gegliedert. In Teil I sind die Grundlagen und Sätze aus der Matrizenrechnung und der Netzwerktheorie zusammengestellt, von denen bei den späteren Untersuchungen Gebrauch gemacht wird. Die Syntheseverfahren einschließlich aller Matrizenumformungen, die hauptsächlich der Gewinnung äquivalenter Schaltungen dienen, werden anschließend in Teil II beschrieben. Die Beweise aller aus der Literatur übernommenen Sätze sind aus Platzgründen weggelassen worden.

Herr Prof. Dr.-Ing. R. Unbehauen hat dem Verfasser das Thema der Arbeit vorgeschlagen und deren Fortgang durch wertvolle Hinweise gefördert. Dafür möchte der Verfasser seinem akademischen Lehrer aufrichtig danken.

1) im Sinne von Tellegen [4].

TEIL I. GRUNDLAGEN UND SÄTZE AUS DER NETZWERKTHEORIE UND DER MATRIZENRECHNUNG

I.1. Vorbemerkungen

Elektrische Netzwerke, die von mehreren äußeren Klemmen oder Polen zugänglich sind, werden Mehrpole genannt. Meist werden - bei gerader Klemmenzahl - je zwei Klemmen zu einem Klemmenpaar oder auch "Tor" (engl.: port) zusammengefaßt; man spricht dann von einem Mehrtor. Unter einem n-Tor wollen wir demnach eine Schaltung mit n Klemmenpaaren verstehen. Ein einfaches und bekanntes Beispiel hierfür ist der Zweipol, der folglich auch Eintor genannt werden kann.

Mit Hilfe bekannter Methoden der Netzwerkanalyse findet man eine mathematische Beschreibung des vorgegebenen Netzwerks. Sie besteht beispielsweise aus der Menge aller möglichen Verknüpfungen der Torspannungen und Torströme; sie charakterisieren gewissermaßen das äußere Verhalten der Schaltung und können daher auch meßtechnisch ohne Kenntnis der inneren Konfiguration der Schaltung ermittelt werden. Beim Zweipol existiert nur ein solcher Zusammenhang, nämlich der Quotient aus Eingangsspannung v und Eingangsstrom i ¹⁾, der wegen seiner physikalischen Bedeutung Zweipolwiderstand oder Zweipolimpedanz heißt. Der Kehrwert des Quotienten heißt Zweipolleitwert oder Zweipoladmittanz. Dem Funktionstyp nach gehören Impedanz und Admittanz der Klasse der positiv reellen Funktionen (PRF) an [6].

RLCT-Netzwerke²⁾ werden passiv und reziprok genannt; die Eigenschaften der Passivität und Reziprozität erlegen den Beziehungen zwischen den Eingangsgrößen bestimmte Realisierungsbedingungen auf, auf die später näher eingegangen werden soll. Von besonderer Wichtigkeit sind diese Bedingungen bei der Synthese, die ihrer Aufgabenstellung nach die Umkehrung der Netzwerkanalyse

- 1) Spannung und Strom sind durchweg als Zeigergrößen bzw. als Laplacetransformierte der entsprechenden Zeitgrößen aufzufassen; so auch hier v , i .
- 2) Netzwerke, die nur aus Widerständen (R), Induktivitäten (L), Kapazitäten (C) und idealen Übertragern (T) bestehen.

lyse darstellt. Das Ziel der Synthese besteht nämlich darin, zu einer gegebenen mathematischen Beschreibung ein Netzwerk zu finden, das dieser Beschreibung genügt. Bei deren Vorschrift müssen aber gerade die Realisierungsbedingungen eingehalten werden. Dadurch wird garantiert, daß man bei der Synthese eine nur aus Elementen der Art R, L, C und T bestehende, mit anderen Worten physikalisch ausführbare Schaltung finden kann.

Die Beschreibung eines Netzwerks durch eine geeignete Teilmenge der Verknüpfungen zwischen seinen Torgrößen geschieht zweckmäßig mit Hilfe von Matrizen. Ein besonders wichtiger Vorteil dieser Art der Beschreibung besteht darin, daß Netzwerkmatrizen bestimmten Umformungen wie z.B. der Kongruenztransformation¹⁾ ohne Verletzung der Realisierungsbedingungen unterzogen werden können.

1.2. Matrizenbeschreibungen von n-Toren

1.2.1. Die allgemeinste Beschreibung [3],[8]

Jedes n-Tor, das - wie vorausgesetzt - nur aus ohmschen Widerständen, Spulen, Kondensatoren und idealen Transformatoren aufgebaut ist, kann im Frequenzbereich ganz allgemein durch eine Gleichung des Typs

$$\underline{A} \underline{v} = \underline{B} \underline{i} \quad (1.1)$$

beschrieben werden. Dabei sind die Matrizen A und B bis auf die Linksmultiplikation mit einer Matrix C bestimmt. A, B, C sind (n,n)-Matrizen, deren Elemente rationale Funktionen der komplexen Frequenz p sind; i, v sind n-Vektoren, bestehend aus den Laplacetransformierten der Torspannungen und -ströme.

Die Bezugsrichtungen der Spannungen und Ströme an einem n-Tor werden i.a. wie in Bild 1 festgelegt. Dabei soll M die das Netzwerk beschreibende Matrix sein (hier also A und B). Die Darstellung nach Gl.(1.1) gestattet einen bequemen Übergang zu den anderen üblichen Matrizenbeschreibungen.

1) vgl. Abschnitt 1.5.2.

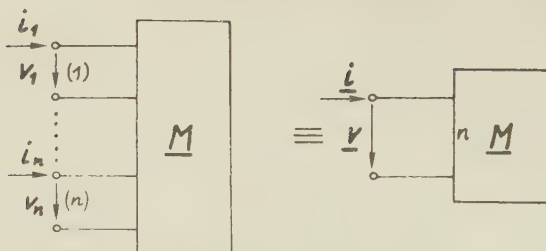


Bild 1

1.2.2. Die Impedanzmatrix und die Admittanzmatrix

Ist $\underline{A}$ aus Gl.(1.1) nichtsingulär¹⁾, so existiert ihre Inverse $\underline{A}^{-1}$, und man erhält aus Gl.(1.1)

$$\underline{v} = \underline{A}^{-1} \underline{B} \underline{i} . \quad (1.2)$$

$\underline{Z} = \underline{A}^{-1} \underline{B}$ heißt die Impedanzmatrix des Netzwerks. Ist umgekehrt $\underline{B}$ nichtsingulär, so existiert $\underline{B}^{-1}$, und man erhält aus Gl.(1.1)

$$\underline{i} = \underline{B}^{-1} \underline{A} \underline{v} . \quad (1.3)$$

$\underline{Y} = \underline{B}^{-1} \underline{A}$ heißt die Admittanzmatrix des Netzwerks. Sind sowohl $\underline{A}$ als auch $\underline{B}$ nichtsingulär, so existieren für das betrachtete n-Port sowohl die Impedanzmatrix $\underline{Z}$ als auch die Admittanzmatrix $\underline{Y}$. Beide sind nichtsingulär, und mit den Gln.(1.2),(1.3) gilt

$$\underline{Z} = \underline{Y}^{-1}, \quad \underline{Y} \underline{Z} = \underline{1}_n . \quad (1.4)$$

1.2.3. Die Hybridmatrix

Im allgemeinen sind die Matrizen $\underline{A}$, $\underline{B}$ beide singulär, jedoch nicht deren Summe $\underline{A} + \underline{B}$, wie Bélévitch [3] nachweist. Es läßt sich daher, wie wiederum Bélévitch [9] zeigt, aus $\underline{A}$ und $\underline{B}$ mindestens eine nichtsinguläre (n,n)-Matrix konstruieren, die aus einer Anzahl linear unabhängiger Spalten von $\underline{A}$ und den komplementären, ebenfalls linear unabhängigen Spalten von $\underline{B}$ besteht. Dieselbe Konstruktion läßt sich natürlich auch mit den Zeilen von $\underline{A}$ und $\underline{B}$ durchführen. Die Anzahl der solchermaßen konstruierbaren Ma-

1) Eine Matrix $\underline{A}(p)$ heißt nichtsingulär, wenn ihre Determinante höchstens an endlich vielen Stellen p verschwindet; sie heißt singulär, falls ihre Determinante identisch verschwindet. Einzelheiten vgl. Kap. 1.4.

trizen wird desto größer, je höher die Summe der normalen Ränge¹⁾ von $\underline{A}$ und $\underline{B}$ ist. So lassen sich, nach der Vertauschung geeigneter Zeilen und der entsprechenden Spalten, $\underline{A}$ und $\underline{B}$ in je vier Teilmatrizen aufspalten:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1 & n-m_1 \\ n & m_1 \end{matrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1 & n-m \\ n & m \end{matrix}. \quad (1.5)$$

Der normale Rang von $\underline{A}$ sei $r_A \geq m_1$; dann ist der entsprechende Rang von $\underline{B}$ $r_B \geq n-m_1$. Wegen der Reihenvertauschungen seien $\underline{A}_{11}$ und damit auch $\underline{B}_{22}$ nichtsingulär. Wenn wir bei $\underline{i}$ und $\underline{v}$ eine analoge Aufspaltung vornehmen, so läßt sich Gl.(1.1) folgendermaßen schreiben:

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Wir konstruieren nun, wie oben beschrieben, aus den m_1 ersten Spalten von $\underline{A}$ und den $n-m_1$ letzten Spalten von $\underline{B}$ die (n,n) -Matrix

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & -\underline{B}_{12} \\ \underline{A}_{21} & -\underline{B}_{22} \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix entsteht aber bei einer geringfügigen Umformung von Gl.(1.6):

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & -\underline{B}_{12} \\ \underline{A}_{21} & -\underline{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & -\underline{A}_{12} \\ \underline{B}_{21} & -\underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Zu der Matrix auf der linken Seite existiert voraussetzungsgemäß eine Inverse, sodaß man mit Gl.(1.7) zu der Beziehung

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & -\underline{B}_{12} \\ \underline{A}_{21} & -\underline{B}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & -\underline{A}_{12} \\ \underline{B}_{21} & -\underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

gelangt, welche die Hybridbeschreibung des Netzwerks darstellt.

Die Matrix

1) zu den Begriffen Rang und normaler Rang vgl. Kap. I.4.

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & -\underline{B}_{12} \\ \underline{A}_{21} & -\underline{B}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & -\underline{A}_{12} \\ \underline{B}_{21} & -\underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix}^{\begin{smallmatrix} m & n-m \\ n-m & n-m \end{smallmatrix}} \quad (1.9)$$

wird Hybridmatrix genannt. Ein Netzwerk besitzt meist mehrere Hybridbeschreibungen. Dies hängt im wesentlichen von den normalen Rängen der Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ ab, wie weiter oben bereits angedeutet wurde.

1.2.4. Die Streumatrix

Obwohl die Streumatrix in den hier beschriebenen Syntheseverfahren nicht vorkommt, soll sie der Vollständigkeit wegen erwähnt werden. Definiert man wie in der Leitungstheorie die Vektoren der "hineinlaufenden" (engl.: incident) und der "reflektierten" Spannungen in normierter Form

$$\underline{V}^{(i)} = \underline{V} + \underline{i} \quad , \quad (1.10a)$$

$$\underline{V}^{(r)} = \underline{V} - \underline{i} \quad , \quad (1.10b)$$

und daraus

$$\underline{V} = \frac{1}{2} (\underline{V}^{(i)} + \underline{V}^{(r)}) \quad , \quad (1.11a)$$

$$\underline{i} = \frac{1}{2} (\underline{V}^{(i)} - \underline{V}^{(r)}) \quad , \quad (1.11b)$$

dann erhält man nach Einsetzen dieser Ausdrücke in Gl.(1.1) und einer einfachen Umformung

$$(\underline{B} + \underline{A}) \underline{V}^{(r)} = (\underline{B} - \underline{A}) \underline{V}^{(i)} \quad , \quad (1.12a)$$

oder, da $\underline{B} + \underline{A}$ nichtsingulär ist,

$$\underline{V}^{(r)} = (\underline{B} + \underline{A})^{-1} (\underline{B} - \underline{A}) \underline{V}^{(i)} \quad , \quad (1.12b)$$

$\underline{S} = (\underline{B} + \underline{A})^{-1} (\underline{B} - \underline{A})$ wird die Streumatrix des n-Portes genannt¹⁾.

1) zur physikalischen Bedeutung der Streumatrix vgl. [8].

1.3. Realisierungsbedingungen

1.3.1. Begriff und Erläuterung der Realisierbarkeit

Ein beliebiges elektrisches Netzwerk mit n Toren muß einigen fundamentalen Bedingungen genügen, um eine Matrizenbeschreibung im Frequenzbereich zu besitzen. Nach Newcomb [8] sind dies Linearität, Zeitinvarianz und vollständige Lösbarkeit. Die Gl.(1.1) stellt dann die allgemeinste Beschreibung des n -Tores dar. RLCT-Netzwerke besitzen weitere einschränkende Eigenschaften, nämlich Endlichkeit (engl.: finiteness), Reziprozität und Passivität. Diese drei Eigenschaften kennzeichnen einerseits die Klasse derjenigen Netzwerke, in denen keine verteilten, nichtreziproken und aktiven Elemente (z.B. Leitungen, Gyratoren, Quellen) vorkommen, zum andern schlägt sich jede von ihnen in charakteristischer Weise in den verschiedenen Matrizen Darstellungen nieder.

Wird nun umgekehrt eine der in Kap. 1.2. definierten Matrizen vorgegeben, die nach einem bekannten Verfahren als RLCT- n -Tor verwirklicht werden soll, so muß vorab geprüft werden, ob sie die für die Synthese notwendigen, der Endlichkeit, Reziprozität und Passivität entsprechenden Eigenschaften besitzt. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die für jede Matrizenbeschreibung verschiedenen Realisierungsbedingungen notwendig und hinreichend dafür sind, daß sich zur jeweiligen Matrix eine RLCT-Schaltung angeben läßt. Dann werden Matrix und zugehöriges n -Tor realisierbar genannt.

1.3.2. Realisierungsbedingungen für die Impedanz- und Admittanzmatrix

Bei den folgenden Definitionen und Sätzen spielt der Begriff der positiv reellen Funktion (PRF) - eingeführt von Brune [6] - eine wesentliche Rolle.

Definition 1: Eine Funktion $F(p)$ heißt positiv reell (oder auch nur positiv), wenn

1. $F(p)$ reell für reelle p ist, und
2. $\operatorname{Re} F(p) \geq 0$ für $\operatorname{Re} (p) \geq 0$ gilt.

Die Bedeutung der Begriffs der PRF geht hervor aus dem folgenden

Satz 1: Eine rationale Funktion $F(p)$ kann dann und nur dann als Impedanz eines RLCT-Zweipols realisiert werden, wenn $F(p)$ PRF ist.

Der Satz gilt entsprechend, d.h. in dualer Weise, auch für die Zweipoladmittanz. Den ersten Beweis für den hinreichenden Charakter des Satzes lieferte wiederum Brune [6] mit dem nach ihm benannten Realisierungsprozess. Unter dem Begriff Realisierung oder Verwirklichung soll dabei fortan abkürzend eine elektrische Schaltung bzw. deren Schaffung verstanden werden, die eine im Sinne von Abschn. 1.3.1. realisierbare skalare oder Matrixfunktion in p verwirklicht, die also mit anderen Worten durch diese Funktion beschrieben wird. In Frage kommen dabei nur Schaltungen, in denen ausschließlich die Elemententypen R, L, C und T vorkommen.

Zu Satz 1 sei noch erwähnt, daß die rationale Form und die Positivität von $F(p)$ jeweils für sich den Schaltungseigenschaften der Endlichkeit und der Passivität entsprechen. Dagegen besitzt $F(p)$ kein der Reziprozität entsprechendes Merkmal, weil sich das eventuelle Vorkommen von nichtreziproken Elementen in einem Zweipol nicht im zugehörigen Eingangswiderstand oder -leitwert $F(p)$ ausdrückt.¹⁾

Verallgemeinern wir die Definition 1 auf Matrizen, die i.a. komplex und deren Elemente Funktionen von p sind, so erhalten wir

Definition 2: Eine komplexe (n,n) -Matrix $\underline{A}(p)$ heißt positive Matrix, wenn für jeden konstanten, komplexen n -Vektor $\underline{x} \neq 0$ die quadratische Form $(\underline{x}^*)^T \underline{A}(p) \underline{x}$ PRF ist [10]. Sind außerdem die Koeffizienten von $\underline{A}(p)$ reell, so nennt man $\underline{A}(p)$ positiv reelle Matrix (PRM).

Auch der Begriff der PRM besitzt vom Gesichtspunkt der Realisierung aus vor allem seit den Arbeiten von Tellegen [4] und McMillan [5] eine wesentliche Bedeutung; sie geht hervor aus Satz 2: Eine rationale (n,n) -Matrix $\underline{Z}(p)$ kann dann und nur dann als Impedanzmatrix eines n -Tors realisiert werden, wenn $\underline{Z}(p)$ symmetrisch und PRM ist.

1) Daraus folgt, daß zu einem passiven Zweipol, der Gyrateuren enthält, immer eine äquivalente RLCT-Schaltung existiert.

Wie im Falle des Zweipols gilt der Satz entsprechend, d.h. in dualem Sinne, auch für Admittanzmatrizen.

Passivität, Endlichkeit und Reziprozität des Netzwerks entsprechen sinngemäß der Positivität, der rationalen Form und der Symmetrie der Matrix. Anders als die skalare PRF läßt die PRM erkennen, ob sie ohne nichtreziproke Elemente realisierbar ist. Das ist genau dann nicht möglich, wenn in der Matrix - bezüglich der Hauptdiagonale - symmetrisch liegende Elemente nicht gleich sind, d.h. wenn die Übertragungseigenschaften zwischen zwei Toren je nach Übertragungsrichtung verschieden sind, also bei Vorkommen z.B. von Gyrotoren im Übertragungsweg. Umgekehrt garantiert die Symmetrie, daß eine rein reziproke Realisierung möglich ist.

1.3.3. Realisierbarkeitsbetrachtungen für die Hybridmatrix

Für die allgemeine Hybridmatrix nach Gl.(1.9) sind noch keine notwendigen und hinreichenden Bedingungen bekannt, weil es bislang kein Syntheseverfahren gibt, das von einer allgemeinen Hybridmatrix zu einer Schaltung führt. Dieses Problem ist aber für den Sonderfall von Hybridmatrizen verlustloser n-Tore gelöst, also solcher Schaltungen, die keine ohmschen Widerstände enthalten [11]. Außerdem können notwendige Bedingungen dafür angegeben werden, daß eine Matrix die Hybriddarstellung eines allgemeinen n-Tors ist [12]. Dieser Wissensstand reicht für die im Rahmen dieser Arbeit behandelten Probleme aus.

Satz 3: Gegeben sei die Hybriddarstellung eines allgemeinen Netzwerks:

$$\begin{matrix} m_1 \\ n-m_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1 & n-m_1 \\ \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{Y}_2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1.13)$$

Die Matrix $\underline{H}$ in Gl.(1.13) besitzt folgende Eigenschaften:

1. Die Elemente von $\underline{H}$ sind reelle, rationale Funktionen von p ; die Teilmatrizen $\underline{H}_{11}$, $\underline{H}_{12}$, $\underline{H}_{21}$, $\underline{H}_{22}$ genügen zwei Symmetrieeigenschaften:

a) $\underline{H}_{11}$ und $\underline{H}_{22}$ sind symmetrisch,

b) $\underline{H}_{12} = -\underline{H}_{21}^T$.

a) und b) werden als hybride Symmetrie bezeichnet.

2. Die Matrix $\underline{H}(p)$ ist PRM.

Die Netzwerkeigenschaften der Reziprozität und der Endlichkeit kommen - ähnlich wie bei den Sätzen über Impedanz- und Admittanzmatrix - durch die hybride Symmetrie der Matrix und die rationale Form ihrer Elemente zum Ausdruck. Der Passivität des Netzwerks schließlich entspricht die Positivität der Matrix.

Mit diesem Satz lassen sich nun die Realisierungsbedingungen für LCT-n-Tore angeben.

Satz 4: Eine (n,n) -Matrix $\underline{H}(p)$ läßt sich dann und nur dann als die Hybridmatrix eines verlustlosen n-Tores realisieren, wenn

1. sie die in Satz 3 dargelegten Eigenschaften besitzt, und
2. für jeden konstanten, komplexen n-Vektor $\underline{x} \neq 0$ die quadratische Form $F(p) = (\underline{x}^*)^T \underline{H}(p) \underline{x}$ eine reaktanzzweipolfunktion ist, deren Realteil auf der imaginären Achse bekanntlich identisch verschwindet.

Die Bedingung 2 des Satzes 4 entspricht der Verlustlosigkeit des realisierenden Netzwerks. Mit Hilfe dieses Satzes können gegebenenfalls zu verlustlosen Schaltungen, für die z.B. wegen starker Intartung keine Immittanzmatrix existiert, äquivalente Schaltungen dadurch gefunden werden, daß man irgendeine Hybridbeschreibung bestimmt, die ja auf jeden Fall existiert, und diese nach dem in [11] gegebenen Verfahren realisiert.

1.4. Weitere wichtige Eigenschaften von Immittanz- und Hybridmatrizen realisierbarer Netzwerke

Satz 5: Ist $\underline{A}(p)$ PRM, so gilt dies auch für ihre Inverse $\underline{A}^{-1}$, sofern diese existiert.

Cauer [13] hat diesen Satz für den Fall formuliert, daß $\underline{A}(p)$ Impedanzmatrix und $\underline{A}^{-1}$ Admittanzmatrix ist. Seine Gültigkeit leuchtet aus physikalischen Gründen ein und bedarf keines weiteren Beweises.

Satz 6: Gegeben sei eine rationale, symmetrische (n,n) -Matrix $\underline{Z}(p) = [Z_{1k}(p)]$, $(1, k = 1, 2, \dots, n)$. Es sei $\underline{Z}(j\omega) = \underline{R}(\omega) + j\underline{X}(\omega)$. $\underline{Z}(p)$ ist dann und nur dann PRM, wenn

1. die Koeffizienten aller $Z_{1k}(p)$ reell sind,
2. det $\underline{R}(\omega)$ und alle Hauptminoren ≥ 0 sind,
3. die Z_{1k} keine Pole in der rechten p-Halbebene besitzen,

und

4. die Pole der Z_{ik} auf der imaginären Achse einfach sind und reelle Residuen P_{ik} haben,¹⁾ für welche $\det [P_{ik}]$ und alle Hauptminoren $\neq 0$ sind [4].

Dieser Satz folgt aus Definition 2 und gibt die Kriterien an, die es gestatten, die Positivität einer Matrix nachzuprüfen.

Satz 7: Die symmetrischen (n,n) -Matrizen $\underline{A}(p)$ und $\underline{B}(p)$ seien PRM. Dann ist auch die Summe $\underline{A}+\underline{B}$ PRM [8].

Die Summe zweier symmetrischer PRM entspricht physikalisch der Reihenschaltung bzw. der Parallelschaltung der zugehörigen n -Tore, je nachdem $\underline{A}$, $\underline{B}$ Impedanz- oder Admittanzmatrizen sind.

Definition 3: Der Grad einer rationalen (n,n) -Matrix $\underline{A}(p)$ ist gleich der Ordnung der Differentialgleichung, die man erhält, wenn man für eine beliebige konstante (n,n) -Matrix $\underline{C}$ die Gleichung $\det(\underline{A}(p)+\underline{C}) = 0$ bildet und die Potenz p^k durch den Operator $d^k/(dt)^k$ ersetzt [4,5].

Definition 4: Eine rationale Matrix $\underline{A}(p)$ besitzt einen Pol bei $p = p_0$, wenn ein oder mehrere Elemente von $\underline{A}$ bei p_0 einen Pol besitzen.

Definition 5: Eine rationale Matrix $\underline{A}(p)$ besitzt eine Nullstelle an der Stelle $p = p_0$, wenn ihre Determinante bei p_0 und sonst nur noch an endlich vielen Stellen der p -Ebene verschwindet²⁾.

Aus den Definitionen 4 und 5 folgt

Satz 8: An der Nullstelle einer rationalen Matrix besitzt deren Inverse einen Pol [4].

Definition 6: Der Rang eines Poles einer rationalen Matrix ist gleich dem Rang derjenigen Matrix, die aus den Polresiduen der Elemente gebildet wird; diese Matrix wird kurz Polresiduum genannt.

Definition 7: Der Rang einer Nullstelle einer rationalen Matrix ist gleich dem Rang des entsprechenden Poles der inversen Matrix.

Definition 8: Der normale Rang einer rationalen Matrix $\underline{A}(p)$ ist

1) Das Residuum eines einfachen Poles der Funktion $Z(p)$ bei $p = \infty$ hat hier - abweichend von der in der Funktionentheorie üblichen Definition - den Wert $(Z(p)/p)|_{p \rightarrow \infty}$; vgl. z.B.:

Hurwitz-Courant: "Funktionentheorie", Springer, Berlin, 1964.

2) Wegen $\det \underline{A} \neq 0$ ist die Existenz von $\underline{A}^{-1}$ gesichert.

der Rang, den $\underline{A}(p)$ für alle p besitzt, ausgenommen endlich viele Werte von p , z.B. Nullstellen und Pole von $\underline{A}(p)$.

Bei einer konstanten Matrix fallen Rang im üblichen Sinne und normaler Rang zusammen.

Definition 9: Ist der normale Rang einer rationalen (n,n) -Matrix $\underline{A}(p)$ kleiner als n , oder ist $\det \underline{A}(p) \equiv 0$, so heißt $\underline{A}(p)$ singuläre Matrix.

Aus Satz 6 und Definition 6 ergibt sich

Satz 9: Die reelle, rationale und symmetrische (n,n) -Matrix $\underline{A}(p)$ besitze bei $p = j\omega_0$ einen Pol mit dem Polresiduum $\underline{P}_0$. Dann besitzt $\underline{A}(p)$ auch bei $p = -j\omega_0$ einen Pol mit demselben Polresiduum.

Satz 10: Die (n,n) -Impedanzmatrix $\underline{Z}(p)$ besitze bei $p = j\omega_1$ und damit wegen Satz 9 auch bei $p = -j\omega_1$ je einen Pol mit dem Residuum $\underline{P}_1$. Diese Pole können wie folgt von $\underline{Z}$ abgespalten werden:

$$\underline{Z}(p) = \frac{\underline{P}_1}{p - j\omega_1} + \frac{\underline{P}_1}{p + j\omega_1} + \underline{Z}_1(p) = \frac{2\underline{P}_1 p}{p^2 + \omega_1^2} + \underline{Z}_1(p) \quad (1.14)$$

Für $p = 0$ bzw. $p = \infty$ verläuft die Abspaltung entsprechend. Die Residuenmatrix $\underline{P}_1$ ist symmetrisch und psd, die Matrix $\underline{Z}_1$ ist PRM und besitzt keinen Pol bei $p = \pm j\omega_1$. Die erste Matrix auf der rechten Seite von Gl.(1.14) kann als ein n -Tor realisiert werden, das aus Parallelschwingkreisen mit der Resonanzfrequenz ω_1 und aus idealen Übertragern besteht. Dabei ist die Zahl der Schwingkreise gleich dem Rang von $\underline{P}_1$. Hat $\underline{P}_1$ den Rang 1, so wird $\underline{Z}(p)$ durch die in Bild 2 dargestellte Schaltung realisiert [4] ¹⁾.

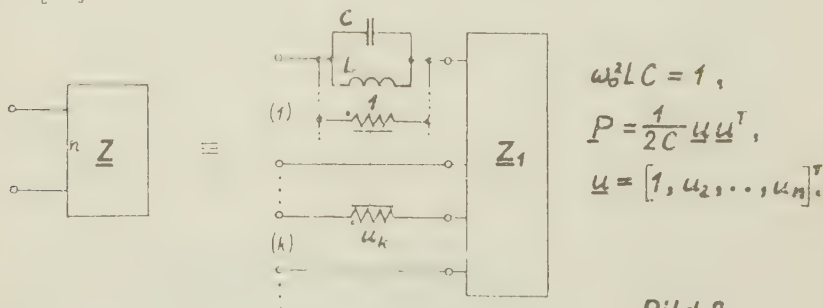


Bild 2

1) zum allgemeinen Fall vgl. Abschn. 1.5.3.

In Bild 2 - wie auch in vielen der folgenden Bilder - ist für alle jeweils gleichartigen Tore eines repräsentativ dargestellt, so hier Tor (k), gekennzeichnet durch (k).

Für Admittanzmatrizen gilt Satz 10 in dualer Weise.

Satz 11: Die Nullstellen einer Impedanzmatrix (Admittanzmatrix) auf der imaginären Achse können dadurch abgespalten werden, daß man die entsprechenden Pole von der Admittanzmatrix (Impedanzmatrix) abspaltet [4].

Satz 12: Der Grad eines Polteils von der Form

$$\underline{B}(p) = \frac{P_0}{p} ; P_\infty p ; \frac{P_1}{p - j\omega_1} \quad (1.15)$$

ist wegen Definition 3 gleich dem Rang r_1 des Residuums $\underline{P}_1$ ($i = 0, \infty, 1$).

Satz 13: Von einer PRM $\underline{A}(p)$ mit dem Grad m werde ein Pol nach Gl.(1.15) mit dem Grad r_1 abgespalten:

$$\underline{A}_1(p) = \underline{A}(p) - \underline{B}(p) \quad (1.16)$$

Dann ist der Grad m_1 von $\underline{A}_1(p)$ [4]

$$m_1 = m - r_1 . \quad (1.17)$$

Definition 10: Enthält die Realisierung einer PRM genau so viele Reaktanzen, wie der Grad der Matrix angibt, dann heißt die Realisierung kanonisch.

Die beiden nächsten Sätze beschäftigen sich mit einer bestimmten Eigenschaft von PRF.

Satz 14: $F(p)$ sei PRF; dann ist

$$|\arg F(p)| \leq |\arg p| \quad (0 \leq |\arg p| \leq \frac{\pi}{2}) . \quad (1.18)$$

Das Gleichheitszeichen kann nur am Rand des Bereiches von $|\arg p|$ auftreten, es sei denn Ungl.(1.18) wird zur Identität. Dann ist $F(p) = kp$ bzw. $F(p) = k/p$; ($k > 0$) [6]. Mit $F(p) = R(p) + jX(p)$; ($p = \sigma + j\omega$) läßt sich Ungl.(1.18) - bei Ausschluß der oben genannten Grenzfälle - wie folgt interpretieren:
Satz 15: [14] Es sei $\operatorname{Re} p \geq 0$; dann wird definiert

$$\lambda(p) = \begin{cases} \frac{R}{\sigma} & (\operatorname{Re} p > 0) , \\ \lim_{p \rightarrow j\omega_0} \frac{R}{\sigma} = \frac{dX}{dp} \Big|_{p=j\omega_0} & (p \rightarrow j\omega_0 \text{ entlang} \\ & \text{eines Strahles } \phi = \arg p = \text{const.}; \phi \neq \pm \frac{\pi}{2}) . \end{cases} \quad (1.19)$$

$$(1.20)$$

$$\mu(p) = \begin{cases} \frac{X}{\omega} & (\omega \neq 0) , \\ \lim_{p \rightarrow \sigma_0} \frac{X}{\omega} = \frac{dF}{dp} \Big|_{p=\sigma_0} & (p \rightarrow \sigma_0 \text{ entlang} \\ & \text{eines Strahles } \phi = \text{const.}; \phi \neq 0, \pi). \end{cases} \quad (1.21)$$

Dann gilt

$$0 < \lambda(p) \pm \mu(p) \leq \infty \quad (\operatorname{Re} p \geq 0) , \quad (1.23)$$

und speziell

$$0 < \lambda(p) \pm \mu(p) < \infty \quad (\operatorname{Re} p > 0) . \quad (1.24)$$

Für später benötigen wir folgende Spezialfälle, die sich aus Ungl.(1.24) ergeben:

1. $p = j\omega_0$ ($\omega_0 \neq 0$), $R(j\omega_0) = 0$:

$$\lambda(j\omega_0) = X'(j\omega_0), \mu(j\omega_0) = \frac{X(j\omega_0)}{\omega_0}; \quad X'(j\omega_0) \pm \frac{X(j\omega_0)}{\omega_0} > 0 . \quad (1.25)$$

2. $p = \sigma_0$ ($\sigma_0 > 0$) :

$$\lambda(\sigma_0) = \frac{F(\sigma_0)}{\sigma_0}, \mu(\sigma_0) = F'(\sigma_0); \quad \frac{F(\sigma_0)}{\sigma_0} \pm F'(\sigma_0) > 0 . \quad (1.26)$$

Im folgenden sei eine Hybridmatrix, die einem realisierbaren Netzwerk entspricht, kurz mit "H-Matrix" oder "Hybridmatrix" bezeichnet. Eine H-Matrix möge die in Gl.(1.13) gezeigte Form und die Eigenschaften von Satz 3 besitzen.

Satz 16: Die Eigenschaften von Satz 3 sind zusammen mit einer der beiden folgenden Eigenschaften hinreichend dafür, daß eine Matrix $\underline{H}$ die Hybridmatrix eines Netzwerks ist:

1. $\underline{H}_{11}$ ist nichtsingulär.

2. $\underline{H}_{22}$ ist nichtsingulär.

Genügt eine Matrix dem Satz 16, so läßt sich eine Realisierung für sie angeben. Man kann nämlich zu dieser H-Matrix mit Hilfe der Teilinversion¹⁾ von $\underline{H}_{11}$ bzw. $\underline{H}_{22}$ die zugehörige Admittanz- bzw. Impedanzmatrix oder beide angeben, für die nach Satz 2 auf jeden Fall Realisierungen existieren. Impedanz- und Admittanzmatrix stellen somit offenbar Sonderfälle der Hybridmatrix dar.

1) vgl. Abschn. 1.5.4.

Entsprechend zu Satz 7 gilt für H-Matrizen der

Satz 17: Gegeben seien zwei H-Matrizen $\underline{H}_1$ und $\underline{H}_2$, die gemäß Gl.(1.13) in Teilmatrizen zerlegt seien. Dann ist auch die Summe $\underline{H}_1 + \underline{H}_2$ eine H-Matrix [12] .

Physikalisch entspricht der Addition zweier H-Matrizen nach Gl. (1.13) die Reihenschaltung der Tore 1 bis m_1 und die Parallelschaltung der Tore m_1+1 bis n von $\underline{H}_1$ und $\underline{H}_2$ (sog. Reihenparallelschaltung). Die H-Matrix des so entstandenen Netzwerks ist $\underline{H}_1 + \underline{H}_2$.

Das Verhalten von H-Matrizen an Polstellen auf der imaginären Achse unterscheidet sich von dem der symmetrischen PRM in einigen Punkten. Dazu die folgenden Sätze.

Satz 18: Besitzt eine Hybridmatrix $\underline{H}$ nach Gl.(1.13) bei $p = j\omega_1$ einen Pol¹⁾, so besitzt sie auch bei $p = -j\omega_1$ einen Pol. Satz 3 zufolge hat das Residuum des Poles bei $j\omega_1$ folgendes Aussehen:

$$\underline{P}_{\omega_1} = (p - j\omega_1) \underline{H}(p) \big|_{p=j\omega_1} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & -j \underline{K}_{21}^T \\ j \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (1.27a)$$

Entsprechend ist das Residuum bei $p = -j\omega_1$

$$\underline{P}_{(-\omega_1)} = (p + j\omega_1) \underline{H}(p) \big|_{p=-j\omega_1} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & j \underline{K}_{21}^T \\ -j \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} . \quad (1.27b)$$

Die Residuen $\underline{P}_{\omega_1}$ und $\underline{P}_{(-\omega_1)}$ sind also hybridsymmetrisch.

Satz 19: Die Hybridmatrix $\underline{H}$ nach Gl.(1.13) besitze wegen Satz 18 bei $\pm j\omega_1$ je einen Pol mit den Residuen $\underline{P}_{\omega_1}$ und $\underline{P}_{(-\omega_1)}$ gemäß den Gln.(1.27 a,b). Diese Pole können wie folgt von $\underline{H}$ abgespalten werden:

$$\begin{aligned} \underline{H}(p) &= \frac{\underline{P}_{\omega_1}}{p - j\omega_1} + \frac{\underline{P}_{(-\omega_1)}}{p + j\omega_1} + \underline{H}_1(p) \\ &= \frac{1}{p^2 + \omega_1^2} \left(2p \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & 0 \\ 0 & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} + 2\omega_1 \begin{bmatrix} 0 & \underline{K}_{21}^T \\ -\underline{K}_{21} & 0 \end{bmatrix} \right) + \underline{H}_1(p) \quad (1.28) \end{aligned}$$

Für den Sonderfall, daß der Pol bei $p = 0$ bzw. $p = \infty$ liegt, ver-

1) vgl. auch Abschn. 1.5.5., Satz 33.

läuft die Abspaltung entsprechend. $\underline{H}_1(p)$ ist Hybridmatrix und besitzt keinen Pol bei $p = \pm j\omega_1$. Die Realisierung des ersten Summanden der rechten Seite von Gl.(1.28) erfolgt durch ein aus Induktivitäten, Kapazitäten und idealen Übertragern bestehendes n-Tor [11]. Für den Fall, daß $m_1 = 1$ und die Ränge von $\underline{P}_{\omega_1}$ und $\underline{P}_{(-\omega_1)}$ je gleich eins sind, ist die Schaltung für $\underline{H}(p)$ im folgenden Bild 3 dargestellt¹⁾ [12].

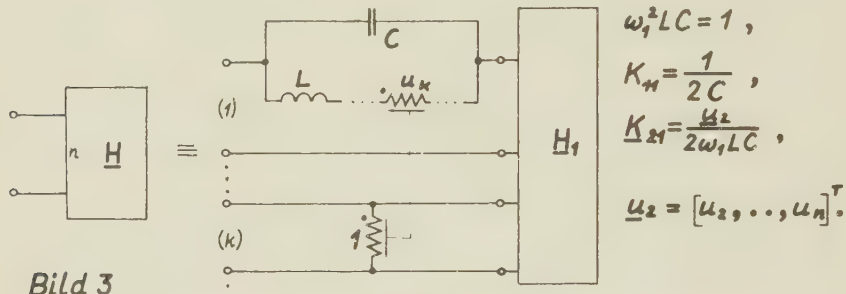


Bild 3

Zuletzt werden noch einige, für die später zu beschreibenden Syntheseverfahren bedeutsamen Eigenschaften von H-Matrizen verlustfreier n-Tore aufgezählt [11].

Satz 20: Eine Matrix $\underline{H} = [H_{ik}]$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) nach Gl.(1.13) erfülle die Eigenschaften von Satz 4. Dann gilt im einzelnen:

1. $\underline{H}_{11}$ und $\underline{H}_{22}$ sind Impedanz- bzw. Admittanzreaktanzmatrizen.
2. Die Elemente von $\underline{H}_{12} = -\underline{H}_{21}^T$ sind gerade rationale Funktionen in p , deren Pole alle auf der imaginären Achse liegen.
3. Besitzt das Element H_{ik} einen Pol auf der imaginären Achse, dann haben auch H_{11} und H_{kk} je einen Pol an dieser Stelle.
4. $\underline{H}(p)$ ist durch eine Partialbruchzerlegung der Form

$$\underline{H}(p) = \frac{\underline{P}_0}{p} + \underline{P}_\infty p + \underline{\tilde{P}}_s + \sum_{i=1}^k \frac{\underline{P}_i p + \underline{\tilde{P}}_i}{p^2 + \omega_i^2} \quad (1.29)$$

darstellbar, wobei für die - durchweg reellen - Matrizen der rechten Seite gilt:

$$\underline{P}_i = \begin{bmatrix} \underline{P}_{n,i} & 0 \\ 0 & \underline{P}_{22,i} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, k, 0, \infty), \quad (1.30a)$$

1) zum allgemeinen Fall vgl. Abschn. 1.5.4.

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} 0 & -P_{ii}^T \\ P_{ii} & 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, k, s) \quad (1.30 b)$$

Die P_i sind symmetrisch und psd, die $\tilde{P}_i$ hybridsymmetrisch.

1.5. Transformationen von positiv reellen, definiten und hybrid- matrizen

1.5.1. Vorbemerkungen

Von den in der Matrizenrechnung üblichen Transformationen kommt im Rahmen dieser Arbeit hauptsächlich die Kongruenztransformation zur Anwendung, die einen zur Umformung symmetrischer und hybridsymmetrischer Matrizen besonders geeigneten Sonderfall der Äquivalenztransformation (z.B. [15]) darstellt. Sie wird hier hauptsächlich dazu herangezogen, um Netzwerkmatrizen in eine für die Realisierung günstige Form zu bringen.

Bei der Kongruenztransformation bleiben der Rang bzw. der normale Rang, die gewöhnliche und hybride Symmetrie und die funktionentheoretischen Eigenschaften der zu transformierenden Matrix erhalten. Im Unterschied zur Howitt-Transformation, einer auf die Maschenimpedanzmatrix angewandten Kongruenztransformation [8], sollen hier nur n-Tor-Matrizen, die mit der topologischen Struktur der Schaltung nicht in direktem Zusammenhang stehen, der Kongruenztransformation unterworfen werden. Das Ziel ist jedoch in beiden Fällen dasselbe, nämlich die Zerlegung einer Schaltung aus der Matrix oder die Entwicklung einer äquivalenten Schaltung zu einer bereits vorliegenden.

1.5.2. Die Kongruenztransformation und ihre Anwendung auf kon- stante, symmetrische Matrizen [15]

Definition 11: Gegeben sei eine symmetrische (n,n)-Matrix $\underline{A}$. Dann heißt die ebenfalls symmetrische (n,n)-Matrix $\underline{B}$ zu $\underline{A}$ kongruent, falls zwischen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ der Zusammenhang

$$\underline{B} = \underline{T}^T \underline{A} \underline{T} \quad (1.31)$$

besteht, wobei $\underline{T}$ eine nichtsinguläre, konstante und reelle (n,n)-Matrix ist, und $\underline{T}^T$ deren Transponierte. Die in Gl.(1.31)

ausgedrückte Umformung der Matrix $\underline{A}$ wird Kongruenztransformation genannt.

Satz 21: Symmetrie, Rang und Index¹⁾ einer konstanten Matrix sind invariant gegenüber einer Kongruenztransformation.

Aus Definition 11 und Satz 21 folgt direkt

Satz 22: Eine konstante, symmetrische (n,n) -Matrix $\underline{A}$ mit dem Rang r_A und dem Index $p_A \leq r_A$ läßt sich durch eine Kongruenztransformation auf ihre Normalform bringen. Diese Normalform ist eine Diagonalmatrix, deren Diagonale mit p_A positiven Einsen, $r_A - p_A$ negativen Einsen und sonst mit Nullen besetzt ist.

Als Spezialfall von Gl.(1.31) erhalten wir also

$$\underline{T}_N^T \underline{A} \underline{T}_N = \underline{N}_A = \begin{bmatrix} \overset{p_A}{\underline{1}_{p_A}} & 0 & \overset{n-r_A}{\underline{0}} \\ 0 & \overset{r_A-p_A}{\underline{-1}_{r_A-p_A}} & 0 \\ 0 & 0 & \overset{n}{\underline{0}} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Ist die Anordnung der Diagonalelemente beliebig, so ist die Zerlegung (1.32) mit einer oberen (wahlweise unteren) und nicht-singulären Dreiecksmatrix $\underline{T}$ möglich. Diese Tatsache folgt unmittelbar aus der Cholesky-Zerlegung [15] mit Satz 22. Wir erhalten damit alternativ zur Gl.(1.32) folgende Beziehungen:

$$\underline{T}_D^T \underline{A} \underline{T}_D = \underline{D}_A = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (\varepsilon_i = +1, 0, -1; \\ i = 1, 2, \dots, n) \end{matrix}, \quad (1.33a)$$

$$\underline{T}_D = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{bmatrix}. \quad (1.33b)$$

$\underline{D}_A$ ist die oben erwähnte Diagonalmatrix, die in ihrer Diagonalen dieselben Elemente wie $\underline{N}_A$ enthält, jedoch in anderer Reihenfolge.

Ist in Satz 22 $p = r_A$, d.h. ist $\underline{A}$ psd, so enthält $\underline{N}_A$ in Gl. (1.32) neben Nullen nur noch Einsen in der Hauptdiagonalen. Man kann dann schreiben

1) zur Definition des Index vgl. [15].

$$\underline{N}_A = \underline{N}_A^T \underline{N}_A, \quad ,$$

und erhält mit Gl.(1.32)

$$\underline{A} = (\underline{T}_N^T)^T \underline{N}_A^T \underline{N}_A \underline{T}_N^{-1} = (\underline{N}_A \underline{T}_N^{-1})^T \underline{N}_A \underline{T}_N^{-1} = \underline{B}^T \underline{B}. \quad (1.34)$$

Die Matrix $\underline{B} = \underline{N}_A \underline{T}_N^{-1}$ in Gl.(1.34) ist eine reelle (n, n) -Matrix, deren letzte $n - r_A$ Spalten verschwinden. Wir formulieren diesen Sachverhalt in

Satz 23: Eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix $\underline{A}$ läßt sich immer nach Gl.(1.34) zerlegen, wobei $\underline{B}$ eine reelle, spaltenreguläre (n, r_A) -Matrix ist. (Die $n - r_A$ Nullspalten können natürlich weggelassen werden).

Satz 24: Eine konstante, symmetrische Matrix $\underline{A}$ mit dem Rang r_A und dem Index $p \leq r_A$ läßt sich in eine Summe von p psd und $r_A - p$ nsd konstanten, symmetrischen Matrizen vom Rang 1 zerlegen.

Dies folgt aus den Gln.(1.33 a,b) durch Auflösung nach $\underline{A}$ und bei Aufteilung von $\underline{L}_A$ in r_A Diagonalmatrizen vom Rang 1. Mit den Gln.(1.33 a,b) erhalten wir für die Zerlegung den formelmäßigen Ausdruck

$$\underline{A} = (\underline{I}_D^{-1})^T \underline{D}_A \underline{I}_D^{-1} = (\underline{I}_D^{-1})^T \left(\sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \epsilon_i & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right) \underline{I}_D^{-1}.$$

Man kann zeigen, daß $\underline{I}_D^{-1}$ als Inverse einer oberen Dreiecksmatrix selbst eine untere Dreiecksmatrix ist.

$$\underline{I}_D^{-1} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \tau_{i1} & \tau_{i2} & \dots & \tau_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{ni} & \dots & \tau_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\tau}_1^T \\ \underline{\tau}_2^T \\ \vdots \\ \underline{\tau}_i^T \\ \vdots \\ \underline{\tau}_n^T \end{bmatrix}, \quad \underline{\tau}_i = \begin{bmatrix} \tau_{i1} \\ \tau_{i2} \\ \vdots \\ \tau_{in} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man erhält damit für $\underline{A}$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{\tau}_1 & \dots & \underline{\tau}_i & \dots & \underline{\tau}_n \end{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \epsilon_i & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{\tau}_1^T \\ \underline{\tau}_2^T \\ \vdots \\ \underline{\tau}_i^T \\ \vdots \\ \underline{\tau}_n^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \underline{\tau}_i \underline{\tau}_i^T. \quad (1.35)$$

($\epsilon_i = +1, 0, -1$)

Das dyadische Produkt $\underline{\tau}_i \underline{\tau}_i^T$ ist eine (n, n) -Matrix, deren jeweils letzte $n - i$ Zeilen und Spalten mit Nullen besetzt sind. Für den

wichtigen Sonderfall, daß $\underline{A}$ psd ist, sind die Glieder der Zerlegungssumme in Gl.(1.35) sämtlich psd vom Rang 1.

Satz 25: Eine symmetrische (n,n) -Matrix $\underline{A}$ mit dem Rang r_A läßt sich - nach der Vertauschung geeigneter Zeilen sowie der entsprechenden Spalten - mit Hilfe der reellen $(r_A, n-r_A)$ -Matrix $\underline{C}$ in folgender Weise in Teilmatrizen aufspalten:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{C}^T \underline{A}_{11} & \underline{C}^T \underline{A}_{12} \underline{C} \end{bmatrix} \quad (\underline{A}_{11} \text{ nichtsingulär}) \quad (1.36a)$$

Aus Gl.(1.36 a) läßt sich eine multiplikative Zerlegung von $\underline{A}$ ablesen:

$$\underline{A} = \underline{I}_C^T \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{I}_C, \quad \underline{I}_C = \begin{bmatrix} \underline{1}_{r_A} & \underline{C} \\ 0 & -\underline{1}_{n-r_A} \end{bmatrix} \quad (1.36b)$$

Für den Sonderfall, daß $\underline{A}$ konstant und psd ist, ist $\underline{A}_{11}$ pd und kann demzufolge gemäß den Sätzen 22 bis 24 zerlegt werden:

$$\underline{A}_{11} = \underline{B}_1^T \underline{B}_1 \quad (1.36c)$$

$\underline{B}_1$ ist eine reelle, nichtsinguläre obere (r_A, r_A) -Dreiecksmatrix.

$$\underline{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1,r_A} \\ 0 & B_{22} & \dots & B_{2,r_A} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B_{r_A,r_A} \end{bmatrix}$$

Lamit erhalten wir aus Gl.(1.36 b) die Faktorenzerlegung der Matrix $\underline{A}$ von Gl.(1.34) für den Fall, daß $\underline{A}$ gemäß Gl.(1.36 a) geordnet ist:

$$\underline{A} = \underline{I}_{CB}^T \underline{I}_{CB}, \quad \underline{I}_{CB} = \begin{bmatrix} \underline{B}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{I}_C = \begin{bmatrix} \underline{B}_1 & \underline{B}_1 \underline{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.36d)$$

Nun sei das homogene Gleichungssystem $\underline{A} \underline{x} = 0$ zu lösen. Da $\underline{A}$ den Rangdefekt $d_A = n - r_A$ besitzt, hat dieses System genau d_A linear unabhängige Lösungsvektoren, die in einer (d_A, r_A) -Matrix $\underline{X}$ zusammengefaßt werden können; dann ist

$$\underline{A} \underline{X} = 0, \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ -\underline{1}_{n-r_A} \end{bmatrix} \quad (1.36e)$$

Ergänzend kann noch erwähnt werden, daß $\underline{X}$ gleich der rechten Teilmatrix der in Gl.(1.36 b) angeschriebenen Matrix $\underline{I}_C$ ist. Man sieht nun unmittelbar, daß $\underline{I}_C$ orthogonal und damit mit seiner Inversen identisch ist; daher gilt mit Gl.(1.36 b) auch die Beziehung

$$\underline{I}_C^T \underline{A} \underline{I}_C = \begin{bmatrix} \underline{A}_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (1.36f)$$

1.5.3. Anwendung der Kongruenztransformation auf die Immittanzmatrizen

Mit Definition 11 und Satz 25 sind bereits in Abschn. 1.5.2. zwei auch für diesen Abschnitt gültige Aussagen gemacht worden. Um einen zu Satz 21 äquivalenten Satz für symmetrische PHM formulieren zu können, müssen wir zunächst die von einem n-Tor aufgenommene Wirkleistung bestimmen. In Analogie zum Zweipol definieren wir dazu die komplexe Leistung. Es seien $\underline{v}$ und $\underline{i}$ die Vektoren der Torspannungen und -ströme des n-Tors. Dann ist

$$N = (\underline{v}^*)^T \underline{i} \quad (1.37a)$$

die komplexe Leistung des n-Tors, und

$$N_w = \operatorname{Re} (\underline{v}^*)^T \underline{i} = \frac{1}{2} \{ (\underline{v}^*)^T \underline{i} + \underline{v}^T \underline{i}^* \} \quad (1.37b)$$

die dem n-Tor zugeführte Wirkleistung. Mit diesen Begriffen lautet

Satz 26: In Gl.(1.31) sei $\underline{A}(p)$ symmetrische PHM (Immittanzmatrix). Dann ist $\underline{B}(p)$, das aus $\underline{A}(p)$ durch die dort beschriebene Kongruenztransformation hervorgeht, ebenfalls symmetrische PHM. Grad, normaler Rang und die Leistungen N , N_w sind invariant gegenüber der Kongruenztransformation und daher bei beiden Matrizen $\underline{A}$, $\underline{B}$ gleich.

Die folgenden Aussagen sind wichtig im Hinblick auf die Realisierung. Zunächst geht aus Definition 11 und Satz 26 direkt folgendes hervor. Zur Impedanzmatrix $\underline{Z}$ existiere deren Inverse $\underline{Y} = \underline{Z}^{-1}$. Außerdem sei nach Gl.(1.31)

$$\underline{Z}_I = \underline{I}^T \underline{Z} \underline{I} . \quad (1.38a)$$

Damit gilt automatisch auch der Zusammenhang

$$\underline{Z}_1^{-1} = \underline{Y}_1 = \underline{T}^{-1} \underline{Y} (\underline{T}^T)^{-1}. \quad (1.38 b)$$

Mit $\underline{Z}$ ist nämlich auch $\underline{Z}_1$ nichtsingulär, d.h. es besitzt den normalen Rang n und damit eine Inverse $\underline{Y}_1$.

Satz 27: $\underline{Z}_1$ sei die Impedanzmatrix eines n -Tors, dessen Realisierung bekannt sei. Dann läßt sich die Impedanzmatrix $\underline{Z}$, die nach Gl.(1.38 a) mit $\underline{Z}_1$ verknüpft sei, durch ein n -Tor-Netzwerk derart verwirklichen, daß man ein nur aus idealen Übertragern bestehendes und durch $\underline{T}$ beschriebenes $2n$ -Tor an n Toren mit der Schaltung von $\underline{Z}_1$ abschließt. Dieser Sachverhalt ist in Bild 4 symbolisch dargestellt.

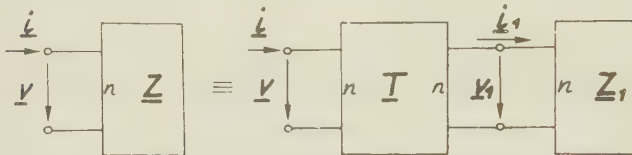


Bild 4

Für Satz gilt in dualer Weise für Admittanzmatrizen, wobei statt Gl.(1.38 a) sinngemäß Gl.(1.38 b) heranzuziehen ist.

Für Begründung von Satz 27 betrachtet man die Strom-Spannungsbeziehungen $\underline{v} = \underline{Z} \underline{i}$ und $\underline{v}_1 = \underline{Z}_1 \underline{i}_1$. Aus ihnen erhält man in Verbindung mit Gl.(1.38 a) als Verknüpfungsgleichung der Strom- und Spannungsvektoren $\underline{i}$, $\underline{i}_1$, $\underline{v}$, $\underline{v}_1$

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{i}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}^T & 0 \\ 0 & \underline{T}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{i} \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

Die $(2n, 2n)$ -Kettenmatrix in Gl.(1.39) beschreibt einen $(n+n)$ -Tor-Übertrager (vgl. Bild 4 und z.B. [8]), an dessen n Eingangstoren die Spannungs- und Stromvektoren $\underline{v}$ und $\underline{i}$, und an dessen Ausgangstoren die Vektoren $\underline{v}_1$ und $\underline{i}_1$ auftreten. Wie bei Kettenmatrizen üblich, ist die Strompfeilung nach Bild 4 so vereinbart, daß $\underline{i}$ in die Schaltung hinein, $\underline{i}_1$ aus der Schaltung herausfließt. Aus naheliegenden Gründen nennt man die Übertragerschaltung kurz "Kongruenzübertrager"¹⁾.

Auf den folgenden wichtigen Sonderfall von Satz 27 soll noch näher eingegangen werden. $\underline{Z}$ habe eine der folgenden Formen:

- 1) wegen der Einzelheiten seiner Realisierung sei auf Abschn. 1.5.4. verwiesen.

$$\underline{Z} = \underline{R}, \frac{\underline{P}_0}{p}, \underline{P}_\infty p, \frac{\underline{P}_1 p}{p^2 + \omega_1^2} \quad (1.40)$$

Die Matrizen $\underline{R}, \underline{P}_1$ ($i = 0, \infty, 1$) sind symmetrisch, psd und vom Rang r bzw. r_1 . Wir beschränken uns auf die erstgenannte Matrix $\underline{R}$, mit deren schaltungsmäßiger Verwirklichung auch die der drei anderen Impedanzmatrizen in Gl.(1.40) gegeben ist.

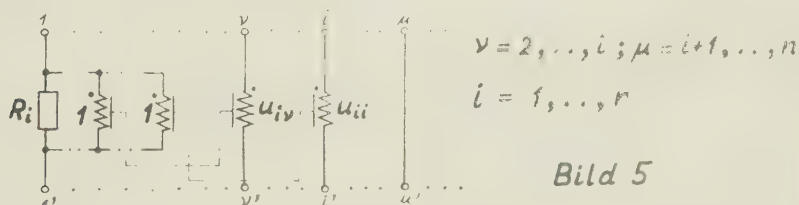
Unter Verwendung von Satz 24 läßt sich $\underline{Z} = \underline{R}$ nach Gl.(1.38 a) so zerlegen, daß man für $\underline{Z}_1$ und damit auch für $\underline{Z}$ sofort eine Schaltung angeben kann. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit soll $\underline{R}$ in der Form von Gl.(1.36 a) vorliegen. Die Zerlegung von $\underline{R}$ nach dem Muster von Gl.(1.35) liefert dann

$$\underline{R} = [\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r, 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} R_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & R_r & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_1^T \\ \vdots \\ \underline{u}_r^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

Hierbei sind die Skalare R_1 bis R_r sämtlich positiv, die Vektoren $\underline{u}_1$ bis $\underline{u}_r$ reell. Trifft man die Vereinbarung, daß die jeweils erste Komponente in den $\underline{u}_i$ gleich eins sein soll, so ergeben sich die positiven Skalare R_i und die Vektoren $\underline{u}_i$ eindeutig aus der Zerlegung. Zur Realisierung von $\underline{R}$ könnte man nun mit Hilfe von Gl.(1.41) die in Satz 27 beschriebene Kettenschaltung bilden; eleganter aber erhält man die Schaltung für $\underline{R}$, wenn man die alternative Schreibung nach Gl.(1.35) für Gl.(1.41) benutzt:

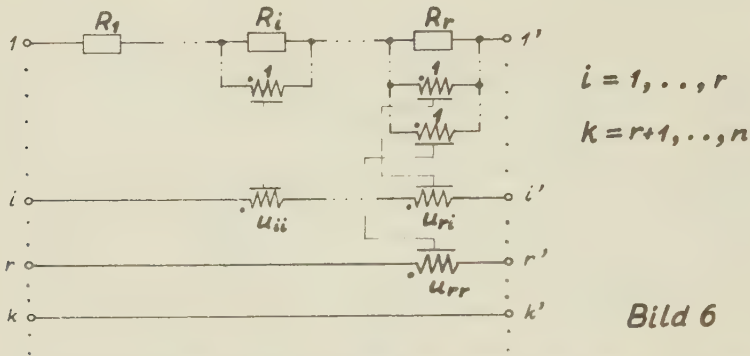
$$\underline{R} = \sum_{i=1}^r \underline{u}_i \underline{u}_i^T R_i ; \underline{u}_i = [1, u_{i2}, \dots, u_{in}, 0, \dots, 0]^T, R_i > 0. \quad (1.42)$$

Der i -te Summand von $\underline{R}$ besitzt die in Bild 5 stellvertretend gezeigte Realisierung.



Das Tor(v) wird durch das Klemmenpaar $v'v$ gebildet. Die Teilschaltungen der übrigen Summanden von Gl.(1.42) sind in entsprechender Weise zu bilden. Die Reihenschaltung der so erhaltenen r

n-Tore stellt die gesuchte, in Bild 6 gezeigte Verwirklichung von $\underline{R}$ dar.



Bei der Realisierung der drei anderen Matrizen von Gl.(1.40) treten an die Stelle der r Widerstände jeweils r_0 Kapazitäten, r_∞ Induktivitäten oder r_1 Parallelschwingkreise mit der Resonanzfrequenz ω_1 . Die Werte der einzelnen Schaltelemente ergeben sich aus der der Gl.(1.41) entsprechenden Zerlegung der Matrizen $\underline{P}_1$.

1.5.4. Anwendung der Kongruenztransformation auf die Hybridmatrix

Im Prinzip lassen sich für H-Matrizen ganz ähnliche Überlegungen anstellen wie für die Immittanzmatrizen im vorigen Abschnitt, kann man diese doch - wie schon früher erwähnt - als Grenzfälle der Hybridmatrix auffassen. Deshalb ist die auf H-Matrizen anwendbare Kongruenztransformation allgemeiner als die bisher behandelte, wenn sie auch rein formal einfacher aussieht. An die Stelle von Definition 11 tritt nun

Definition 12: Als hybride Kongruenztransformation wird die Verknüpfung zweier Hybridmatrizen

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & -\underline{H}_{21}^T \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ n-m_1 \end{matrix}, \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & -\underline{K}_{21}^T \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ n-m_1 \end{matrix} \quad (1.43)$$

in der Form

$$\underline{K} = \underline{T}^T \underline{H} \underline{T} \quad (1.44)$$

bezeichnet. $\underline{T}$ ist eine nichtsinguläre, reelle und konstante (n,n) -Matrix und läßt sich folgendermaßen in Teilmatrizen aufspalten:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{T}_a & \underline{O} \\ \underline{O} & \underline{T}_b \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ n-m_1 \end{matrix} \quad (1.45)$$

$\underline{T}_a$ und $\underline{T}_b$ sind natürlich nichtsingulär.

Nach Form (1.45) stellt $\underline{T}$ in Gl. (1.45) einen Sonderfall der in den Abschnitten 1.5.2. und 1.5.3. vorkommenden Transformationsmatrix dar, da hier zwei Teilmatrizen verschwinden. Die der Bedeutung nach allgemeinere Definition 12 fällt mit der Definition 11 zusammen, wenn entweder $m_1 = n$ wird - dann ist $\underline{H}$ Impedanzmatrix - oder $m_1 = 0$ wird - dann ist $\underline{H}$ Admittanzmatrix.

Die nächsten Sätze und Überlegungen befassen sich mit den Eigenschaften und Anwendungen der hybriden Kongruenztransformation.

Satz 28: Hybride Symmetrie und normaler Rang einer Hybridmatrix sind invariant gegenüber einer hybriden Kongruenztransformation.

Der Satz folgt unmittelbar aus Definition 12; er ist deshalb im Hinblick auf die Verwirklichung von H-Matrizen bedeutsam, ähnlich wie die Sätze 21 und 26 für die Realisierung von symmetrischen PRM.

Satz 29: Die Hybridmatrizen $\underline{H}$ und $\underline{K}$, die beide in der Form von Gl. (1.43) vorliegen, seien gemäß Gl. (1.44) miteinander verknüpft. Außerdem sei die Realisierung von $\underline{K}$ bekannt. Dann läßt sich die Hybridmatrix $\underline{H}$ durch eine n-Tor-Schaltung derart verwirklichen, daß man die Hälfte der Tore von je einem $2m_1$ - bzw. $2(n-m_1)$ -Tor, die ihrerseits nur aus idealen Übertragern bestehen, mit der entsprechenden Anzahl von Toren der n-Tor-Schaltung für $\underline{K}$ abschließt. Die beiden Übertragerschaltungen werden durch die Teilmatrizen $\underline{T}_a$ und $\underline{T}_b$ beschrieben. Das so entstehende n-Tor für $\underline{H}$ ist in Bild 7 schematisch dargestellt. Aus Bild 7 geht hervor, wie die drei Mehr Tore zusammengeschaltet sind.

Zum Beweis des Satzes schreibt man die hybriden Strom-Spannungsbeziehungen für $\underline{H}$ und $\underline{K}$ an:

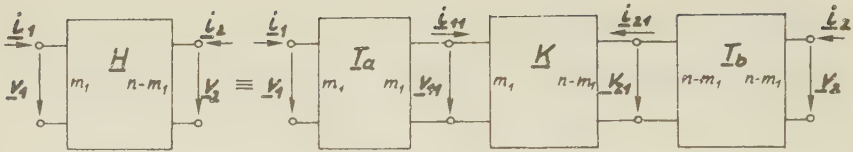


Bild 7

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & -\underline{H}_{21}^T \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{v}_{11} \\ \underline{v}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & -\underline{K}_{21}^T \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_{11} \\ \underline{i}_{21} \end{bmatrix}. \quad (1.46)$$

Man kann dann mit Hilfe der Gln.(1.43) bis (1.45) die Teilmatrizen von $\underline{H}$ durch jene von $\underline{K}$ ausdrücken: (1.47a)

$$\underline{H}_{11} = (\underline{I}_a^{-1})^T \underline{K}_{11} \underline{I}_a^{-1}, \quad \underline{H}_{21} = (\underline{I}_b^{-1})^T \underline{K}_{21} \underline{I}_a^{-1}, \quad \underline{H}_{22} = (\underline{I}_b^{-1})^T \underline{K}_{22} \underline{I}_b^{-1}.$$

Die Verknüpfungen zwischen den Eingangsvariablen von $\underline{H}$ einerseits und $\underline{K}$ andererseits lauten

$$\begin{matrix} m_1 \\ m_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{i}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{I}_a^{-1})^T & 0 \\ 0 & \underline{I}_a \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{11} \\ \underline{i}_{11} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} n-m_1 \\ n-m_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_2 \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_b & 0 \\ 0 & (\underline{I}_b^{-1})^T \end{bmatrix} \begin{matrix} n-m_1 \\ n-m_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{21} \\ \underline{i}_{21} \end{bmatrix}.$$

Zur Realisierung der Übertragernetzwerke genügen davon die Beziehungen

$$\underline{i}_1 = \underline{I}_a \underline{i}_{11}, \quad (1.47b)$$

$$\underline{v}_2 = \underline{I}_b \underline{v}_{21}. \quad (1.47c)$$

Nun soll noch - anhand der Gln.(1.47 b,c) - die Schaltung der beiden Kongruenzübertrager bestimmt werden. Der Begriff des Kongruenzübertragers ist zwar schon in Abschnitt I.5.3. aufgetaucht, doch wird seine explizite Schaltung praktisch nur bei der Verwirklichung von H-Matrizen benötigt. Es sei also allgemein

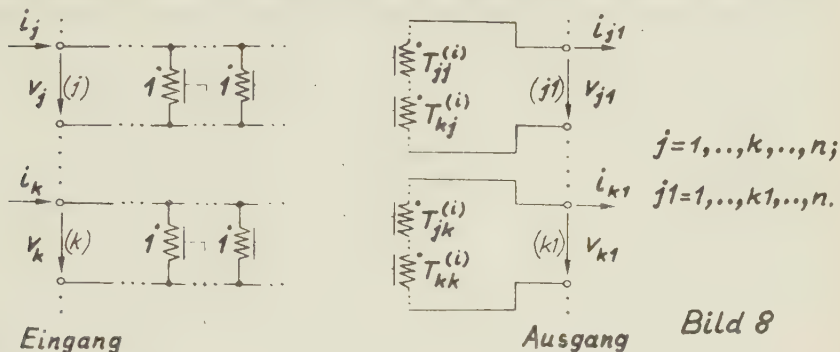
$$\underline{T} = [\underline{T}_{jk}] \quad (j, k = 1, 2, \dots, n),$$

$$\underline{i} = [i_k], \quad \underline{i}_1 = [i_{k1}], \quad \underline{v} = [v_k], \quad \underline{v}_1 = [v_{k1}] \quad (k=1, \dots, n).$$

Fall 1) Nach Gl.(1.47 b) gilt

$$i = T^{(i)} i_1, \quad i_k = \sum_{j=1}^n T_{kj}^{(i)} i_{j1} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (1.48a)$$

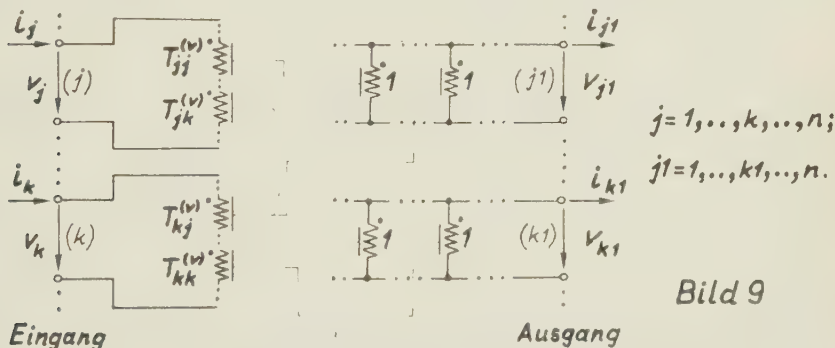
Dazu gehört - wie leicht einzusehen ist - die nachstehend abgebildete n-Tor-Schaltung, von der stellvertretend nur jeweils die Tore (j) und (k) auf Ein- und Ausgangsseite gezeichnet sind.



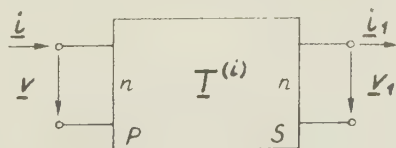
Fall 2) Nach Gl.(1.47 c) gilt

$$\underline{v} = \underline{T}^{(v)} \underline{v}_1, \quad v_k = \sum_{j=1}^n T_{kj}^{(v)} v_{j1} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (1.48b)$$

Das zugehörige n-Tor ist in Bild 9 dargestellt.



Symbolisch wird der Kongruenzübertrager - wie in Bild 10 für Fall 1) gezeigt - als "schwarzer Kasten" dargestellt.



$\underline{T}^{(1)}$ bedeutet die den Kongruenzübertrager beschreibende Matrix. Seine jeweils n Eingangs- und Ausgangstore werden durch je ein

Klemmenpaar links und rechts sowie den Buchstaben n symbolisiert. Die Lage der Buchstaben P und S (links oder rechts unten) gibt an, auf welcher Seite des Netzwerks die i.a. n Übertragerwicklungen parallel bzw. in Serie zu den Eingangsklemmen liegen. Entsprechendes gilt für die Schaltung von Fall 2).

Nunmehr sollen wichtige Sonderfälle näher betrachtet werden, wobei das oben gewonnene Wissen hauptsächlich bei der Realisierung von Reaktanzhybridmatrizen angewendet wird. Nur hierfür sind nämlich, wie schon in Abschnitt 1.3.3. erwähnt wurde, notwendige und hinreichende Bedingungen bekannt.

Die Partialbruchzerlegung von Reaktanzhybridmatrizen und das Aussehen der einzelnen Terme waren in den Gl.(1.29),(1.30 a,b) beschrieben worden. Wir betrachten zwei typische Terme und bestimmen deren Realisierung.

$$1. \quad \underline{H}_0 = \underline{\tilde{P}}_s = \text{const.}, \quad (1.49a)$$

$$\underline{\tilde{P}}_s = \begin{bmatrix} 0 & -\underline{P}_{21s}^T \\ \underline{P}_{21s} & 0 \end{bmatrix}_m \quad (m_1 + m_2 = n). \quad (1.50a)$$

$$2. \quad \underline{H}_1(p) = \frac{\underline{P}_1 p + \underline{\tilde{P}}_1}{p^2 + \omega_1^2} = \frac{\underline{P}_1(p)}{p^2 + \omega_1^2}, \quad (1.49b)$$

$$\underline{P}_1 = \begin{bmatrix} \underline{P}_{111} & 0 \\ 0 & \underline{P}_{221} \end{bmatrix}_m, \quad \underline{\tilde{P}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\underline{P}_{211}^T \\ \underline{P}_{211} & 0 \end{bmatrix}_m. \quad (1.50b)$$

Betrachtet man zunächst die Hybridgleichung der ersten Matrix, so sieht man sofort, wie deren Realisierung im wesentlichen aussieht (zur Vereinfachung sind die Indizes weggelassen worden).

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\underline{P}^T \\ \underline{P} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix}$$

Die Gleichung beschreibt den konstanten Zusammenhang zwischen den Ein- und Ausgangsspannungen $\underline{v}_1$ und $\underline{v}_2$ einerseits, und zwischen den Ein- und Ausgangsströmen $\underline{i}_1$ und $\underline{i}_2$ andererseits. Es liegen somit ähnliche Verhältnisse vor wie beim Kongruenzübertrager (Gln.(1.47 b,c)), mit der Ausnahme, daß die Transformationsmatrix $\underline{P}$, die den Zusammenhang der Variablen vermittelt,

als (m_1, m_2) -Rechteckmatrix i.a. singular ist. Durch die Vertauschung geeigneter Zeilen und Spalten, die lediglich der Umnummerierung der Tore (1) bis (n) entspricht, wird $\underline{H}_0$ in eine Form gebracht, die ihre Rangverhältnisse besser erkennen läßt:

$$\underline{H}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\underline{Q}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{Q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} m_{11} + m_{12} = m_1, \\ m_{21} + m_{22} = m_2 \end{matrix} \right)$$

Vertauscht man in den Strom-Spannungsbeziehungen für $\underline{H}_0$ die Vektoren $\underline{i}_1$ und $\underline{v}_2$, die wie $\underline{v}_1$ und $\underline{i}_2$ analog zu $\underline{H}_0$, also gemäß den Beziehungen

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} \underline{v}_{11} \\ \underline{v}_{12} \end{bmatrix} \begin{matrix} m_{11} \\ m_{12} \end{matrix}, \quad \underline{i}_1 = \begin{bmatrix} \underline{i}_{11} \\ \underline{i}_{12} \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} \underline{v}_{21} \\ \underline{v}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m_{21} \\ m_{22} \end{matrix}, \quad \underline{i}_2 = \begin{bmatrix} \underline{i}_{21} \\ \underline{i}_{22} \end{bmatrix}$$

partitioniert sind, so bekommt man das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_{11} \\ \underline{v}_{12} \\ \underline{i}_{21} \\ \underline{i}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{Q}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{21} \\ \underline{v}_{22} \\ \underline{i}_{11} \\ \underline{i}_{12} \end{bmatrix}.$$

Davon genügen zur Beschreibung des Netzwerks für $\underline{H}_0$ die drei Gleichungen

$$\underline{i}_{21} = \underline{Q} \underline{i}_{11}, \quad \underline{v}_{12} = 0, \quad \underline{i}_{22} = 0. \quad (1.51)$$

Die vierte Beziehung $\underline{v}_{11} = -\underline{Q}^T \underline{v}_{21}$ enthält keine zusätzliche Information. Die Prinzipschaltung von $\underline{H}_0$ kann aus der Gl.(1.51) direkt abgelesen werden und hat danach das in Bild 11 gezeigte Aussehen.

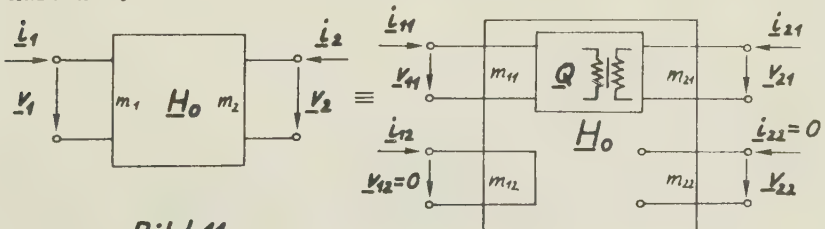


Bild 11

Die Schaltung des durch $\underline{z}$ und einen idealen Übertrager charakterisierten $(m_{11} + m_{21})$ -Tors erhält man im wesentlichen wie die des Kongruenztransformators (vgl. Satz 29, Fall 1). Zu beachten ist lediglich die andere Pfeilung der Torgrößen und die unterschiedliche Anzahl von Toren links und rechts.

Die andere Matrix, die realisiert werden soll, ist $\underline{H}_1(p)$. Im allgemeinen sind die Teilmatrizen $\underline{P}_{11,1}$ und $\underline{P}_{22,1}$ in Gl.(1.50 b) singulär, d.h. ihre Ränge sind kleiner oder höchstens gleich m_1 bzw. m_2 . Deshalb wird $\underline{H}_1(p)$ durch die Vertauschung geeigneter Zeilen und Spalten, die wiederum lediglich einer Ummumerierung der Tore 1 bis n entspricht, in eine Form gebracht, an der man die Rangverhältnisse leichter ablesen kann.

$$\underline{H}_1 = \frac{1}{p^2 + \omega_1^2} \begin{bmatrix} \underline{Q}_{11} p & 0 & -\underline{Q}_{21}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{Q}_{21} & 0 & \underline{Q}_{22} p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{matrix} \quad \begin{matrix} (m_{11} + m_{12} = m_1, \\ m_{21} + m_{22} = m_2) \end{matrix}$$

Infolge der Reihenvertauschung sind die Teilmatrizen $\underline{Q}_{11}$, $\underline{Q}_{22}$ nichtsingulär; man erkennt daraus, daß die Ränge von $\underline{P}_{11,1}$ bzw. $\underline{P}_{22,1}$ gleich $m_{11} \leq m_1$ bzw. $m_{21} \leq m_2$ sind.

Partitioniert man die zu $\underline{H}_1$ gehörigen Ein- und Ausgangsvektoren in folgender Weise:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{11} \\ \underline{V}_{12} \\ \underline{I}_{21} \\ \underline{I}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{matrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{11} \\ \underline{I}_{12} \\ \underline{V}_{21} \\ \underline{V}_{22} \end{bmatrix},$$

so erhält man die "reduzierte" Hybridbeziehung

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{11} \\ \underline{I}_{21} \end{bmatrix} = \frac{1}{p^2 + \omega_1^2} \begin{bmatrix} \underline{Q}_{11} p & -\underline{Q}_{21}^T \\ \underline{Q}_{21} & \underline{Q}_{22} p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{11} \\ \underline{V}_{21} \end{bmatrix}, \quad (1.52 a)$$

$$\underline{V}_{12} = 0, \quad \underline{I}_{22} = 0. \quad (1.52 b)$$

Diese drei Gleichungen beschreiben die Prinzipschaltung von $\underline{H}_1$ in Bild 12. Das durch die Hybridmatrix von Gl.(1.52 a) gekennzeichnete $(m_{11} + m_{21})$ -Tor in der Prinzipschaltung für $\underline{H}_1$ bleibt noch zu verwirklichen. Wir bringen dazu die Matrix von Gl.

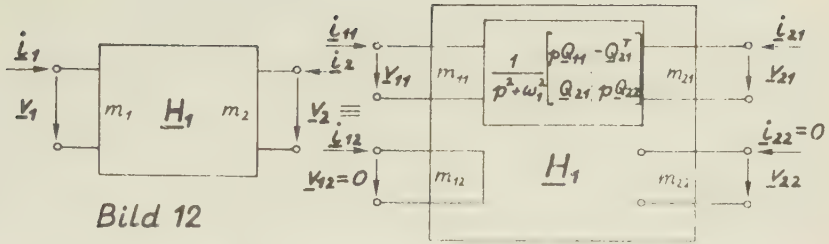


Bild 12

(1.52 a) in eine Form, deren Realisierung bekannt ist. Den Ausgangspunkt der Umformung bildet Gl.(1.52 a) in leicht geänderter Schreibweise.

$$\begin{bmatrix} -1_{m_{11}} & 0 & \underline{Q}_{11} \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} & -\underline{Q}_{11}^T \frac{1}{p^2 + \omega_1^2} \\ 0 & -1_{m_{21}} & \underline{Q}_{21} \frac{1}{p^2 + \omega_1^2} & \underline{Q}_{21} \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{11} \\ \underline{i}_{21} \\ \underline{i}_{11} \\ \underline{v}_{21} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.53a)$$

1. Möglichkeit: Die Linksmultiplikation von Gl.(1.53 a) mit der nichtsingulären Matrix

$$\underline{L}(p) = \begin{bmatrix} -\underline{Q}_{11}^{-1} \frac{p^2 + \omega_1^2}{p} & 0 \\ -\underline{Q}_{21} \underline{Q}_{11}^{-1} \frac{1}{p} & 1_{m_{21}} \end{bmatrix}$$

ergibt die Beziehung

$$\begin{bmatrix} \underline{Q}_{11}^{-1} (p + \frac{\omega_1^2}{p}) & 0 & -1_{m_{11}} & \underline{Q}_{11}^{-1} \underline{Q}_{21}^T \frac{1}{p} \\ \underline{Q}_{21} \underline{Q}_{11}^{-1} \frac{1}{p} & -1_{m_{21}} & 0 & (\underline{Q}_{21} - \frac{1}{\omega_1^2} \underline{Q}_{21} \underline{Q}_{11}^{-1} \underline{Q}_{21}^T) \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} + \underline{Q}_{21} \underline{Q}_{11}^{-1} \underline{Q}_{21}^T \frac{1}{\omega_1^2 p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{11} \\ \underline{i}_{21} \\ \underline{i}_{11} \\ \underline{v}_{21} \end{bmatrix} = 0$$

oder anders geschrieben

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_{11} \\ \underline{i}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{21}^T \\ \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{11} \\ \underline{v}_{21} \end{bmatrix}, \quad \left. \begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \underline{Q}_{11}^{-1} (p + \frac{\omega_1^2}{p}), \quad \underline{Y}_{21} = \underline{Q}_{21} \underline{Q}_{11}^{-1} \frac{1}{p}, \\ \underline{Y}_{22} &= (\underline{Q}_{22} - \frac{1}{\omega_1^2} \underline{Q}_{21} \underline{Q}_{11}^{-1} \underline{Q}_{21}^T) \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} + \underline{Q}_{21} \underline{Q}_{11}^{-1} \underline{Q}_{21}^T \frac{1}{\omega_1^2 p}. \end{aligned} \right\} (1.53b)$$

Die aus den Teilmatrizen $\underline{Y}_{11}$, $\underline{Y}_{21}$ und $\underline{Y}_{22}$ nach Gl.(1.53 b) bestehende $(m_{11} + m_{21}, m_{11} + m_{21})$ -Matrix $\underline{Y}$ ist PRM, da die aus der realisierbaren H-Matrix von Gl.(1.52 a) abgeleitet wurde. Mit

Ist die in $\underline{Y}_{22}$ vorkommende Matrix $\underline{Q}_{22} - (\underline{Q}_{21} \underline{Q}_{11}^{-1} \underline{Q}_{12}^T) / \omega_i^2$ als das Zweifache des Polresiduums von $\underline{Y}_{22}$ bei $p = j\omega_i$ psd. Die Admittanzmatrix in Gl.(1.53 b) läßt sich dadurch realisieren, daß man jeden Polteil gesondert als Schaltung verwirklicht (vgl. Gln.(1.40) bis (1.42) und die Bilder 5, 6, jedoch in dualer Form), und die drei resultierenden n-Tore parallel schaltet.

2. Möglichkeit: Die Linksmultiplikation von Gl.(1.53 a) mit der nichtsingulären Matrix

$$\underline{L}_2(p) = \begin{bmatrix} 1_{m11} & \underline{Q}_{21}^T \underline{Q}_{22}^{-1} \frac{1}{p} \\ 0 & -\underline{Q}_{22}^{-1} \frac{p^2 + \omega_i^2}{p} \end{bmatrix}$$

ergibt die Gleichung

$$\begin{bmatrix} -1_{m11} & -\underline{Q}_{21}^T \underline{Q}_{22}^{-1} \frac{1}{p} \left(\underline{Q}_{11} - \frac{1}{\omega_i^2} \underline{Q}_{21}^T \underline{Q}_{22}^{-1} \underline{Q}_{21} \right) \frac{p}{p^2 + \omega_i^2} + 0 \\ 0 & \underline{Q}_{22}^{-1} (p + \frac{\omega_i^2}{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} \\ \underline{I}_{21} \\ \underline{I}_{11} \\ \underline{Y}_{21} \end{bmatrix} = 0$$

oder in anderer Schreibweise

$$\left. \begin{aligned} \begin{matrix} m \\ m \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} \\ \underline{Y}_{21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{21}^T \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{11} \\ \underline{I}_{21} \end{bmatrix} \\ \underline{Z}_{11} &= \left(\underline{Q}_{11} - \frac{1}{\omega_i^2} \underline{Q}_{21}^T \underline{Q}_{22}^{-1} \underline{Q}_{21} \right) \frac{p}{p^2 + \omega_i^2} + \frac{1}{\omega_i^2 p} \underline{Q}_{21}^T \underline{Q}_{22}^{-1} \underline{Q}_{21} \\ \underline{Z}_{21} &= -\underline{Q}_{22}^{-1} \underline{Q}_{21} \frac{1}{p} \quad , \quad \underline{Z}_{22} = \underline{Q}_{22}^{-1} (p + \frac{\omega_i^2}{p}) \end{aligned} \right\} (1.53c)$$

$\underline{Z}$ ist ebenfalls PRM, weil es wie $\underline{Y}$ von der realisierbaren H-Matrix in Gl.(1.52 a) abgeleitet wurde, und stellt - wie man leicht sieht - die Inverse von $\underline{Y}$ dar (vgl. Gl.(1.53 b)). $\underline{Z}$ wird dadurch realisiert, daß man jeden Polteil gesondert verwirklicht und die drei n-Tore in Reihe schaltet.

Für die übrigen Terme der Partialbruchzerlegung Gl.(1.29) gelten die für $\underline{H}_0$ und $\underline{H}_1$ angestellten Überlegungen sinngemäß. Damit läßt sich jede beliebige Reaktanzhybridmatrix als Reihenparallelschaltung derjenigen n-Tore realisieren, welche die Summanden ihrer Partialbruchzerlegung verwirklichen.

I.5.5. Die Gyration und ihre netzwerktheoretische Interpretation [12]

Der Begriff der Gyration wurde von Luffin [12] für die nachstehend beschriebene, nichtkonstante und nichtsinguläre¹⁾ Transformation einer quadratischen Matrix $\underline{A}(p)$ eingeführt.

Definition 13: Die Matrix $\underline{A}(p)$ vermittele den Zusammenhang zweier Vektoren $\underline{x}$ und $\underline{y}$:

$$\underline{y} = \underline{A}(p) \underline{x} \quad (1.54)$$

$\underline{A}(p)$, $\underline{x}$ und $\underline{y}$ werden wie folgt partitioniert:

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{y}_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ \\ p_2 \end{matrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ \\ p_2 \end{matrix}, \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{A}_{13} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \underline{A}_{23} \\ \underline{A}_{31} & \underline{A}_{32} & \underline{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 & 1 & p_2 \\ \\ p \end{matrix} \quad (\underline{A}_{22} \neq 0).$$

Dann läßt sich Gl.(1.54) wegen $\underline{A}_{22} \neq 0$ nach dem neuen Vektor auflösen, der aus $\underline{y}$ durch die Vertauschung von $\underline{y}_2$ mit $\underline{x}_2$ entsteht.

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} - \frac{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}} & \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} & \underline{A}_{13} - \frac{\underline{A}_{12} \underline{A}_{23}}{\underline{A}_{22}} \\ -\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}} & \frac{1}{\underline{A}_{22}} & -\frac{\underline{A}_{23}}{\underline{A}_{22}} \\ \underline{A}_{31} - \frac{\underline{A}_{32} \underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}} & \frac{\underline{A}_{32}}{\underline{A}_{22}} & \underline{A}_{33} - \frac{\underline{A}_{32} \underline{A}_{23}}{\underline{A}_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

Die Matrix in Gl.(1.55) wird "Gyration von $\underline{A}$ um sein Diagonalelement $\underline{A}_{22}$ " genannt. Zur Abkürzung verwenden wir den Operator $\Gamma_2^{(2)}$ und erhalten damit für Gl.(1.55) die alternative Schreibweise

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{y}_3 \end{bmatrix} = \Gamma_2(\underline{A}) \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}.$$

Wie man einfach nachprüfen kann, kann $\Gamma_2(\underline{A})$ auch in der Form

- 1) Die Transformation läßt den normalen Rang der Matrix unverändert.
- 2) $\Gamma_1(\underline{A})$ bedeutet: "Gyration der Matrix $\underline{A}$ um ihr Diagonalelement $\underline{A}_{11}$ ".

$$\Gamma_2(A) = \begin{bmatrix} \underline{A}_{12} \\ 1 \\ \underline{A}_{32} \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ \\ p_2 \end{matrix} + \frac{1}{\underline{A}_{22}} \begin{bmatrix} -\underline{A}_{21} & 1 & -\underline{A}_{23} \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 & 1 & p_2 \end{matrix} + \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & 0 & \underline{A}_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \underline{A}_{31} & 0 & \underline{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ \\ p_2 \end{matrix} \quad (1.56)$$

geschrieben werden, aus der das Bildungsgesetz leicht zu erkennen ist.

Die beschriebene Operation stellt eine Art Teilinversion von $\underline{A}$ dar. Ihre auf alle Diagonalelemente der - natürlich nichtsingulären - Matrix $\underline{A}$ wiederholte Anwendung bewirkt deren volle Invertierung. Bildet man von $\underline{B} = \Gamma_2(\underline{A})$ wiederum die Gyration im gleichen Sinne, mit anderen Worten die Matrix $\Gamma_2(\underline{B})$, so gelangt man zur Ausgangsmatrix $\underline{A}$ zurück. Dies läßt sich unmittelbar an Gl.(1.55) verifizieren. Wir halten diesen Tatbestand fest in

Satz 30: Es sei mit $\underline{B}(p) = \Gamma_i(\underline{A})$ die Gyration der (n,n) -Matrix $\underline{A}(p)$ um das Diagonalelement $\underline{A}_{ii}$ bezeichnet. Dann gilt

$$\Gamma_i(\underline{B}) = \Gamma_i \Gamma_i(\underline{A}) = \underline{A} . \quad (1.57)$$

Symbolisch schreibt man

$$\Gamma_i \Gamma_i = \underline{1}_n .$$

Nun kann man die verallgemeinerte Gyration definieren, die mehrere Teilinversionen im Sinne von Definition 13 zusammenfaßt.

Definition 14: Gegeben sei Gl.(1.54) in der partitionierten Form

$$\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{A}_{13} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \underline{A}_{23} \\ \underline{A}_{31} & \underline{A}_{32} & \underline{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix} , \quad \underline{A}_{22} \text{ nichtsingulär} . \quad (1.58)$$

Vertauscht man in den Vektoren $\underline{y}$ und $\underline{x}$ die Teilvektoren $\underline{y}_2$ und $\underline{x}_2$ miteinander, so geht Gl.(1.58) über in

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{y}_3 \end{bmatrix} = \Gamma_2 \left(\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{A}_{13} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \underline{A}_{23} \\ \underline{A}_{31} & \underline{A}_{32} & \underline{A}_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix} , \quad (1.59a)$$

wobei

$$\underline{\Gamma}_2 \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{A}_{13} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \underline{A}_{23} \\ \underline{A}_{31} & \underline{A}_{32} & \underline{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{12} & \underline{A}_{22}^{-1} & \underline{A}_{32} \\ \underline{1}_{p_2} & \underline{A}_{22}^{-1} & \underline{A}_{32} \\ \underline{A}_{32} & \underline{A}_{22}^{-1} & \underline{A}_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{A}_{13} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \underline{A}_{23} \\ \underline{A}_{31} & \underline{A}_{32} & \underline{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{1}_{p_1} & \underline{0} & \underline{A}_{13} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{A}_{31} & \underline{0} & \underline{A}_{33} \end{bmatrix} \quad (1.59b)$$

Die Matrix $\underline{\Gamma}_1(\underline{A})$ bezeichnet die verallgemeinerte Gyration von $\underline{A}$ um die Teilmatrix $\underline{A}_{11}$ (in der partitionierten Form), welche voraussetzungsgemäß nichtsingulär ist.

Der Satz 3o gilt sinngemäß auch für die erweiterte Gyration; in symbolischer Schreibung ist also

$$\underline{\Gamma}_i \underline{\Gamma}_l = \underline{1}_n.$$

Um deutlicher sichtbar zu machen, daß es sich bei der Bildung der Gyration¹⁾ um eine Matrizen transformation handelt, wollen wir diese Transformation explizit anschreiben. Wir formen Gl. (1.58) um in die homogene Gleichung

$$\begin{bmatrix} -\underline{1}_{p_1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{A}_{13} \\ \underline{0} & -\underline{1}_{p_2} & \underline{0} & \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \underline{A}_{23} \\ \underline{0} & \underline{0} & -\underline{1}_{p_3} & \underline{A}_{31} & \underline{A}_{32} & \underline{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{y}_3 \\ \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix} = \underline{0}.$$

Nach der Linksmultiplikation mit der nichtsingulären und nicht-konstanten Matrix

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \underline{1}_{p_1} & -\underline{A}_{12} \underline{A}_{22}^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{A}_{22}^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{A}_{32} \underline{A}_{22}^{-1} & \underline{1}_{p_3} \end{bmatrix}$$

entsteht wiederum eine homogene Gleichung, die die Auflösung nach dem Vektor

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_1^T & \underline{x}_2^T & \underline{y}_3^T \end{bmatrix}^T$$

gestattet. Dies führt - wie man leicht verifizieren kann - zu

- 1) Darunter sei in Zukunft die normale und verallgemeinerte Gyration verstanden, sofern nichts anderes gesagt ist.

der Matrixengleichung

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{22}^{-1} \underline{A}_{21} & \underline{A}_{12} \underline{A}_{22}^{-1} & \underline{A}_{13} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{22}^{-1} \underline{A}_{23} \\ -\underline{A}_{22}^{-1} \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22}^{-1} & -\underline{A}_{22}^{-1} \underline{A}_{23} \\ \underline{A}_{31} - \underline{A}_{32} \underline{A}_{22}^{-1} \underline{A}_{21} & \underline{A}_{32} \underline{A}_{22}^{-1} & \underline{A}_{33} - \underline{A}_{32} \underline{A}_{22}^{-1} \underline{A}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix},$$

die sich als identisch mit Gl.(1.59) erweist.

Im Hinblick auf spezielle Matrizen sollen noch zwei weitere Eigenschaften der Gyration durch Sätze festgehalten werden, die direkt aus den Definitionen 13 und 14 folgen.

Satz 31: Die Matrix $\underline{A}(p)$ besitze die Eigenschaft der hybriden Symmetrie, sie läßt sich also wie folgt schreiben:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11}^{(n_1)} & -\underline{A}_{21}^{(n_1)T} \\ \underline{A}_{21}^{(n_1)} & \underline{A}_{22}^{(n_2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \quad (1.60)$$

Man denke sich $\underline{A}$ in der nachfolgend demonstrierten Art zerlegt:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{A}_{13} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \underline{A}_{23} \\ \underline{A}_{31} & \underline{A}_{32} & \underline{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix}$$

Die Dimensionen p_1, p_2, p_3 stimmen i.a. nicht mit n_1 oder n_2 überein, jedoch ist $p_1 + p_2 + p_3 = n_1 + n_2$. Die Teilmatrizen $\underline{A}_{1k}$ setzen sich aus Teilen der $\underline{A}_{1k}^{(1)}$ zusammen. Dann ist die Gyration von $\underline{A}$ um $\underline{A}_{22}$ (wahlweise auch um $\underline{A}_{11}, \underline{A}_{33}$), $\underline{\Gamma}_2(\underline{A})$, wieder eine hybridsymmetrische Matrix.

Gegenüber Satz 3 soll dabei eine Matrix verallgemeinernd auch dann hybridsymmetrisch sein, wenn sie nach der Vertauschung geeigneter Zeilen und der entsprechenden Spalten den Eigenschaften 1a) und 1b) von Satz 3 genügt. Abgesehen von dieser Vertauschung ist

$$\underline{\Gamma}_2(\underline{A}) = \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & -\underline{B}_{21}^T \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix}, \quad (1.61)$$

wobei q_1 und q_2 von den p_1 und n_1 abhängen. In dem Sonderfall,

daß man die Gyration von $\underline{A}$ um die Teilmatrizen $\underline{A}_{11}$ oder $\underline{A}_{22}$ in Gl.(1.60) bildet, ist $\underline{B}$ offenbar symmetrisch. So betrachtet ist die gewöhnliche Symmetrie ein Spezialfall der hybriden Symmetrie. Die Umkehrung dieses Spezialfalles erhält man aus Satz 31 mit $n_2 = 0$ und $p_3 = 0$.

Satz 32: Die Matrix $\underline{A}(p)$ besitze die Eigenschaft der hybriden Symmetrie; man vergleiche Gl.(1.60). Nun sei aber der normale Rang von $\underline{A}_{11}^{(1)}$ $r_1 < n_1$. Dann kann $\underline{A}$ - nach der Vertauschung geeigneter Zeilen und der entsprechenden Spalten - folgendermaßen dargestellt werden:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{C}^T \underline{A}_{22} \underline{C} & \underline{C}^T \underline{A}_{22} & -\underline{A}_{31}^T \\ \underline{A}_{22} \underline{C} & \underline{A}_{22} & -\underline{A}_{32}^T \\ \underline{A}_{31} & \underline{A}_{32} & \underline{A}_{33} \end{bmatrix}^{n_1, n_2, n_3}, \underline{A}_{22} \text{ nichtsingulär. (1.62a)}$$

Hierbei ist $\underline{C}$ eine konstante, reelle $(r_1, n - r_1)$ -Matrix. Ein Vergleich mit Gl.(1.60) ergibt die Entsprechungen

$$\left. \begin{aligned} \underline{A}_{11}^{(n)} &= \begin{bmatrix} \underline{C}^T \underline{A}_{22} \underline{C} & \underline{C}^T \underline{A}_{22} \\ \underline{A}_{22} \underline{C} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}, \\ \underline{A}_{21}^{(n)} &= [\underline{A}_{31} \quad \underline{A}_{32}], \quad \underline{A}_{22}^{(n)} = \underline{A}_{33}. \end{aligned} \right\} (1.62b)$$

Dann liefert die Gyration von $\underline{A}$ um $\underline{A}_{22}$ das Ergebnis

$$\underline{r}_2(\underline{A}) = \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{C}^T & -\underline{A}_{31}^T + \underline{C}^T \underline{A}_{32} \\ -\underline{C} & \underline{A}_{22}^{-1} & \underline{A}_{22}^{-1} \underline{A}_{32}^T \\ \underline{A}_{31} - \underline{A}_{32} \underline{C} & \underline{A}_{32} \underline{A}_{22}^{-1} & \underline{A}_{33} + \underline{A}_{32} \underline{A}_{22}^{-1} \underline{A}_{32}^T \end{bmatrix}. (1.63)$$

Eine wichtige Folgerung der obigen Definitionen und Sätze wird mit dem folgenden Satz 33 gezogen, den man als Verallgemeinerung von Satz 8 charakterisieren kann. Zuerst muß der in Satz 33 benötigte Begriff der "G-Nullstelle" definiert werden.

Definition 15: Die Matrix $\underline{A}(p)$ besitzt eine G-Nullstelle (G-Singularität) bei $p = p_0$, falls eines ihrer Hauptdiagonalelemente $\underline{A}_{11}$ oder eine ihrer Hauptuntermatrizen $\underline{A}_{11}$ eine Nullstelle bei $p = p_0$ besitzt.

Satz 33: Die Matrix $\underline{A}(p)$ sei bei $p = p_0$ G-singulär, und zwar

besitze die Hauptuntermatrix $\underline{A}_{11}$ eine Singularität vom Rang m . Dann hat die Gyration $\underline{B} = \underline{\Gamma}_1(\underline{A})$ bei $p = p_0$ einen Pol vom Rang m . Der Beweis ist leicht zu führen. $\underline{A}$ liege in der Form von Gl. (1.59) vor, und es sei $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$. Nach Definition 7 hat $\underline{A}_{22}^{-1}$ bei $p = p_0$ einen Pol vom Rang m . Dann folgt die Behauptung sofort aus Gl. (1.59). Ist $\underline{A}$ Immittanz- oder Hybridmatrix, so kann der genannte Pol von $\underline{B}$, welches ebenfalls entweder Immittanz- oder Hybridmatrix ist, gemäß den Sätzen 18, 19 abgespalten und realisiert werden.

Die netzwerktheoretische Bedeutung der Gyration geht aus den obigen Ausführungen unmittelbar hervor, wenn man sich vor Augen hält, daß die Immittanzmatrizen symmetrische und die Hybridmatrizen hybridsymmetrische Matrizen sind. Die Bildung aller möglichen Gyrationen aus einer beliebigen Netzwerkmatrix $\underline{H}$, $\underline{Z}$ oder $\underline{Y}$ führt auf alle Hybriddarstellungen, die für das betrachtete Netzwerk existieren, inbegriffen möglicherweise die Grenzfälle der Impedanz- und Admittanzmatrix. Per definitionem entsteht nämlich aus einer gegebenen Hybriddarstellung jede weitere durch die Vertauschung eines oder mehrerer Paare von zusammengehörigen Torgrößen v_k und i_k , die sich im links- bzw. rechtsseitigen Vektor der Hybridgleichung befinden. Zwei wichtige Folgerungen können gezogen werden.

1. Jede Matrix, die als Gyration einer realisierbaren Immittanz- oder Hybridmatrix entstanden ist, ist wieder realisierbar.
2. Auch aus singulären Netzwerkmatrizen - deren Inverse also nicht existiert - können i.a. Gyrationen gebildet werden. Es versteht sich von selbst, daß sämtliche für die Gyrationen beliebiger Matrizen abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten auch für die Gyrationen von Netzwerkmatrizen gelten.

1.6. Eine zweckmäßige Darstellungsweise partitionierter Matrizen

Aus mancherlei Gründen, z.B. des besseren Verständnisses oder der besseren Übersichtlichkeit wegen, ist die Darstellung einer Matrix $\underline{A}$ in partitionierter Form wünschenswert. Eine partitionierte Matrix $\underline{A}$ mit jeweils n Zeilen und Spalten wurde bisher folgendermaßen dargestellt:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \overset{b_1}{\underline{A}_{11}} & \overset{b_2}{\underline{A}_{12}} & \dots & \overset{b_m}{\underline{A}_{1m}} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{A}_{l1} & \dots & \dots & \underline{A}_{lm} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_l \end{matrix} \quad \begin{matrix} (a_1 + a_2 + \dots + a_l = \\ = b_1 + b_2 + \dots + b_m = n) \end{matrix} \quad (1.64)$$

Hierbei sind die $\underline{A}_{1k}$ Rechteckmatrizen mit a_1 Zeilen und b_k Spalten. Wir betrachten speziell die Partitionierung von $\underline{A}$ in vier Teilmatrizen, da dieser Sonderfall von Gl.(1.64) in Teil II häufig vorkommt. Die Matrix $\underline{A}$ werde nun mit Hilfe der links- und rechtsseitigen Vektoren $\underline{y}$ und $\underline{x}$ zur Matrixgleichung ergänzt. Beide Vektoren seien analog zu $\underline{A}$ zerlegt; man erhält dann die Matrixgleichung

$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{b_1}{\underline{A}_{11}} & \overset{b_2}{\underline{A}_{12}} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} \quad (a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = n) , \quad (1.65)$$

oder ausführlich geschrieben

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{y}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \underline{A}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \underline{A}_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} \right). \quad (1.66)$$

Wir führen an dieser Stelle zwei Rechteckmatrizen ein, die man als eine Art rechteckiger Einheitsmatrizen auffassen kann.

$$\underline{E}_{nk} = \begin{bmatrix} \underline{1}_k \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} k \\ n-k \end{matrix}, \quad \underline{F}_{n,n-k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{1}_{n-k} \end{bmatrix} \begin{matrix} n-k \\ k \end{matrix}. \quad (1.67a,b)$$

Mit ihrer Hilfe lassen sich die einzelnen, singulären Summanden von $\underline{A}$ sowie die Vektorsummanden, die $\underline{y}$ und $\underline{x}$ bilden, in Gl.(1.66) zwar als Matrizenprodukte, dafür aber ohne die oft lästigen Matrizenklammern und Dimensionsbezeichnungen und vor allem platzsparender schreiben. Diese Vereinfachung, deren Sinn hier noch nicht ganz einzusehen ist, wird sich später - d.h. in Teil II - in mancher Hinsicht als zweckmäßiger erweisen als die bisher verwendete Darstellungsweise etwa nach Gl.(1.65).

Aus Gl.(1.66) erhält man mit den Gln.(1.67 a,b) im einzelnen:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \underline{E}_{n,a1} \underline{y}_1, & \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{y}_2 \end{bmatrix} &= \underline{F}_{n,n-a1} \underline{y}_2, \\ \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \underline{E}_{n,b1} \underline{x}_1, & \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} &= \underline{F}_{n,n-b1} \underline{x}_2, \\ \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \underline{E}_{n,a1} \underline{A}_{11} \underline{E}_{n,b1}^T, & \begin{bmatrix} 0 & \underline{A}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \underline{E}_{n,a1} \underline{A}_{12} \underline{F}_{n,n-b1}^T, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \underline{A}_{21} & 0 \end{bmatrix} &= \underline{F}_{n,n-a1} \underline{A}_{21} \underline{E}_{n,b1}^T, & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} &= \underline{F}_{n,n-a1} \underline{A}_{22} \underline{F}_{n,n-b1}^T. \end{aligned} \right\} (1.68)$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke und Gl.(1.66) kann man die Matrizen-
gleichung (1.65) in folgender Weise darstellen:

$$\underline{E}_{n,a1} \underline{y}_1 + \underline{F}_{n,n-a1} \underline{y}_2 = (\underline{E}_{n,a1} \underline{A}_{11} \underline{E}_{n,b1}^T + \underline{E}_{n,a1} \underline{A}_{12} \underline{F}_{n,n-b1}^T + \underline{F}_{n,n-a1} \underline{A}_{21} \underline{E}_{n,b1}^T + \underline{F}_{n,n-a1} \underline{A}_{22} \underline{F}_{n,n-b1}^T) (\underline{E}_{n,b1} \underline{x}_1 + \underline{F}_{n,n-b1} \underline{x}_2) \quad (1.69)$$

Die Rückkehr zur Ausgangsbeziehung (1.65) ist sofort möglich,
wenn man die - auch an späterer Stelle verwendeten - Orthogo-
nalitätsbeziehungen der in den Gln.(1.67 a,b) eingeführten
Matrizen betrachtet.

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_{nk} \underline{E}_{nk}^T &= \begin{bmatrix} \underline{1}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n-k}, & \underline{F}_{n,n-k} \underline{F}_{n,n-k}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{1}_{n-k} \end{bmatrix}_{n-k}, \\ \underline{E}_{nk}^T \underline{E}_{nk} &= \underline{1}_k, & \underline{F}_{n,n-k}^T \underline{F}_{n,n-k} &= \underline{1}_{n-k}, \\ \underline{E}_{nk} \underline{E}_{nk}^T + \underline{F}_{n,n-k} \underline{F}_{n,n-k}^T &= \underline{1}_n, \\ \underline{E}_{nk}^T \underline{F}_{n,n-k} &= 0, & \underline{F}_{n,n-k}^T \underline{E}_{nk} &= 0. \end{aligned} \right\} (1.70)$$

Entsprechende Regeln lassen sich auch für Produkte aus $\underline{E}_{n,k1}$,
 $\underline{E}_{n,k2}$, $\underline{F}_{n,n-k1}$, $\underline{F}_{n,n-k2}$ herleiten, wenn $k_1 \neq k_2$ ist. Mit Hilfe
der Gln.(1.70) kann Gl.(1.69) wie folgt vereinfacht werden:

$$\underline{E}_{n,a1} \underline{y}_1 + \underline{F}_{n,n-a1} \underline{y}_2 = (\underline{E}_{n,a1} \underline{A}_{11} + \underline{F}_{n,n-a1} \underline{A}_{21}) \underline{x}_1 + \\ + (\underline{E}_{n,a1} \underline{A}_{12} + \underline{F}_{n,n-a1} \underline{A}_{22}) \underline{x}_2$$

Da $\underline{E}_{n,a1}$ und $\underline{F}_{n,n-a1}$ spaltenreguläre Matrizen sind, ist diese Gleichung dem Gleichungspaar

$$\underline{y}_1 = \underline{A}_{11} \underline{x}_1 + \underline{A}_{12} \underline{x}_2 ,$$

$$\underline{y}_2 = \underline{A}_{21} \underline{x}_1 + \underline{A}_{22} \underline{x}_2$$

gleichwertig, das seinerseits Gl.(1.65) entspricht.

TEIL II. VERFAHREN ZUR SYNTHESE VON n-TOREN ANHAND IHRER IMMITTANZMATRIX

II.1. Vorbemerkungen

In diesem Teil der Arbeit werden zwei Verfahren beschrieben, mit deren Hilfe man zu einer vorgeschriebenen Immittanzmatrix eine Schaltung finden kann. Gemeinsam ist den Verfahren, daß sie kanonische Netzwerke liefern, die in irgendeiner Form Verallgemeinerungen der Zweipolschaltungen von Brune [6] bzw. von Unbehauen [7] auf n-Tore sind. Deshalb verläuft auch die Entwicklung einer symmetrischen PRM in eine Schaltung im Prinzip wie der Prozeß von Brune bzw. der von Unbehauen. Durch die wiederholte Abspaltung geeigneter Matrizen einfacher Bauart, also von geringem Rang und Grad, und deren Realisierung als elektrisches Netzwerk, wird der Grad der gegebenen Matrix bis auf Null reduziert. Die dabei gewonnene Schaltung muß gegebenenfalls noch äquivalent umgeformt werden, um sie in eine realisierbare Gestalt zu bringen.

Die Aufgabenstellung vereinfacht sich erheblich, wenn man den folgenden Hinweis beachtet. Die bei der Synthese vorgeschriebene symmetrische PRM kann entweder als Impedanz- oder als Admittanzmatrix aufgefaßt werden. Ist nun aber das Realisierungsverfahren für die erstere bekannt, so liegt wegen des Dualitätsprinzips in der Netzwerktheorie [8] auch das Verfahren für die letztere vor. Aus diesem Grunde werden die Syntheseverfahren im folgenden nur an Impedanzmatrizen vorgeführt; sie lassen sich dann - wie gesagt - in dualer Weise auf Admittanzmatrizen anwenden.

II.2. Das erste Syntheseverfahren: die Erweiterung des Unbehauen-Prozesses für Zweipole [7] auf n-Tore

II.2.1. Überblick

Wie viele andere Syntheseverfahren besteht auch das von Unbehauen aus einer Aneinanderreihung gleichartiger Entwicklungszyklen, in deren Verlauf der Grad der zu realisierenden Zweipolfunktion jeweils um höchstens zwei bzw. höchstens vier bis

auf Null verringert wird. Ein Entwicklungszyklus läuft dabei etwa folgendermaßen ab. In der abgeschlossenen rechten p -Halbebene werden die sogenannten Entwicklungsstellen der zu realisierenden PRF gesucht. Spaltet man von der Funktion einen konstanten und einen in passender Weise von p abhängigen Term ab, so wird diese an der Entwicklungsstelle Null, bekommt aber einen bzw. mehrere zusätzliche Pole auf der imaginären p -Achse. Die derart erzeugte Nullstelle wird von der Umkehrfunktion als Pol abgespalten. Nach erneuter Inversion der Restfunktion baut man dann den bzw. die bei der ersten Abspaltung künstlich geschaffenen Pole ab. Polerzeugung und -abbau äußern sich in einer Gradzunahme bzw. -abnahme der PRF; am Ende eines jeden Entwicklungszyklus ist der Grad jedoch um höchstens zwei bzw. vier gesunken. Zwar braucht man zur Verwirklichung der einzelnen abgespaltenen Terme sowohl positive als auch negative Elemente, doch läßt sich die aus dem Gesamtzyklus resultierende Schaltung stets in eine realisierbare Form überführen.

Bei den Entwicklungsstellen muß man zwischen solchen unterscheiden, welche auf der imaginären bzw. auf der positiv reellen Achse liegen, und solchen, die sich in der offenen rechten Halbebene befinden. Der erstgenannte Fall ist schon von Brune [6] behandelt worden.

In Analogie zu diesem skizzierten Zweipolverfahren läuft nun der auf n -Tor-Matrizen erweiterte Prozeß ab. Das Ziel des Entwicklungszyklus, nämlich die Gradreduzierung, und dessen prinzipieller Verlauf bleiben praktisch gleich; nur tritt bei der Rechnung und den Beweisen an die Stelle der Skalarenarithmetik die Arithmetik von Matrizen, Determinanten und quadratischen Formen. Die dazu nötigen Grundlagen wurden bereits in Teil I erarbeitet. Die abgespaltenen Terme werden als - der Struktur und dem Grad nach - einfache n -Tore verwirklicht, bei denen wie im Zweipolfall zum Teil zunächst auch negative Schaltelemente verwendet werden. Jedoch läßt sich auch hier eine ausführbare Variante mit nur positiven Schaltelementen gewinnen.

In den nächsten Abschnitten wird nun das Syntheseverfahren beschrieben, welches als erweiterter Unbehauenprozeß charakterisiert werden kann. Dem eigentlichen Entwicklungszyklus, der in

mehrere elementare Schritte unterteilt ist, folgt die äquivalente Umformung der gewonnenen, nichtrealisierbaren Schaltung in eine realisierbare. Wie bei der Zweipolsynthese müssen nach der Lage der Entwicklungsstellen zwei Fälle unterschieden und getrennt behandelt werden.

II.2.2. Bestimmung der Entwicklungsstellen

Es sei $\underline{Z}(p)$ eine beliebig vorgeschriebene, durch ein n -Tor zu realisierende, symmetrische (n,n) -Impedanzmatrix mit dem normalen Rang n . Mögliche Pole von $\underline{Z}$ bei $p = 0$ und $p = \infty$ seien zuvor gemäß Satz 10 abgespalten und realisiert worden, $\underline{Z}(p)$ wird nun in seinen geraden Anteil $\underline{G}(p)$ und seinen ungeraden Anteil $\underline{U}(p)$ zerlegt:

$$\underline{Z}(p) = \underline{G}(p) + \underline{U}(p), \quad (2.1)$$

wobei

$$\underline{G}(p) = \frac{1}{2} \{ \underline{Z}(p) + \underline{Z}(-p) \}, \quad \underline{U}(p) = \frac{1}{2} \{ \underline{Z}(p) - \underline{Z}(-p) \}. \quad (2.2)$$

Per definitionem ist $\underline{G}(-p) = \underline{G}(p)$, $\underline{U}(-p) = -\underline{U}(p)$.

Wir betrachten zunächst den geraden Teil. Durch Streichung seiner jeweils 1-ten Zeile und Spalte erhält man aus $\underline{G}$ eine symmetrische $(n-1, n-1)$ -Teilmatrix vom normalen Rang $n-1$, die als $\underline{G}^{11}$ bezeichnet werde. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $i = 1$. Wir bilden nun die skalare Funktion

$$R(p) = \frac{\det \underline{G}(p)}{\det \underline{G}''(p)}. \quad (2.3)$$

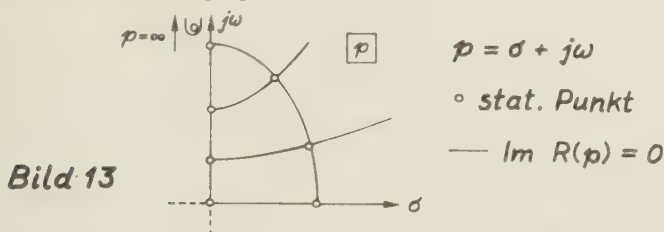
$R(p)$ wird auf denjenigen Kurven der abgeschlossenen rechten p -Halbebene rein reell, für die $\text{Im } R(p) = 0$ gilt. Auf ihnen suchen wir die Punkte p_v , die der Gleichung

$$\left. \frac{dR}{dp} \right|_{p=p_v} = 0 \quad (2.4)$$

genügen. Sie werden stationäre Stellen oder stationäre Punkte genannt. In einem stationären Punkt müssen sich mindestens zwei der Kurven $\text{Im } R(p) = 0$ schneiden, und zwar notwendig rechtwinklig, falls gilt:

$$\frac{d^2 R}{d p^2} \big|_{p=p_v} \neq 0$$

Aus Symmetriegründen können wir uns auf den ersten Quadranten der p -Ebene beschränken. Bild 13 zeigt eine mögliche Lage von stationären Stellen im ersten Quadranten als Schnittpunkte der erwähnten Kurven [7] .



Weiterhin werden von allen stationären Stellen nur solche betrachtet, für die die Ungleichung

$$0 \leq R(p_v) = R_v \leq R(j\omega) \quad (0 \leq \omega \leq \infty) \quad (2.5)$$

erfüllt ist. Sie heißen Entwicklungsstellen, da jede von ihnen eine Entwicklungsmöglichkeit von $\underline{Z}(p)$ in eine Schaltung bietet. Auf der imaginären p -Achse liegt nach Satz 6 stets eines der im Sinne von Ungl.(2.5) zulässigen p_v . Aus $\underline{Z}(p)$ bilden wir mit R_v nach Ungl.(2.5) und unter Benutzung der in Kap. 1.6. eingeführten Darstellungsweise die neue Matrix

$$\underline{Z}_1(p) = \underline{Z}(p) - R_v \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T. \quad (2.6a)$$

$\underline{Z}_1(p)$ ist ebenfalls Impedanzmatrix, da seine Realteilmatrix wegen der oben getroffenen Auswahl der R_v auf der imaginären p -Achse psd ist. Die Zerlegung von $\underline{Z}_1(p)$ im Sinne von Gl.(2.1) in $\underline{G}_1(p)$ und $\underline{U}_1(p)$ ergibt mit den Gln.(2.6 a),(2.2)

$$\underline{G}_1 = \underline{G} - R_v \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T, \quad \underline{U}_1 = \underline{U}. \quad (2.6b)$$

$\underline{G}_1(p)$ besitzt bei $p = p_v$ eine mathematische Eigenschaft, die direkt mit der Definition der Entwicklungsstellen zusammenhängt. Zu ihrer Herleitung bildet man die Determinante von $\underline{G}_1$ und die Ableitung der Determinante unter Verwendung der Gl.(2.6 b).

$$\det \underline{G}_1 = \det \underline{G} - R_v \det \underline{G}'' , \quad (2.7a)$$

$$\frac{d}{dp} \{ \det \underline{G}_1 \} = \frac{d}{dp} \{ \det \underline{G} \} - R_v \frac{d}{dp} \{ \det \underline{G}'' \} . \quad (2.8a)$$

Mit Gl.(2.3) und für $p = p_v$ liefert Gl.(2.7 a)

$$\det \underline{G}_1(p_v) = 0 . \quad (2.7b)$$

Man stellt außerdem fest, daß der Zähler des mit Hilfe von Gl.(2.3) berechneten Differentialquotienten der Gl.(2.4) mit dem Ausdruck der Gl.(2.8 a) an der Stelle $p = p_v$ übereinstimmt, weshalb gilt

$$\frac{d}{dp} \{ \det \underline{G}_1(p) \}_{|p=p_v} = 0 . \quad (2.8b)$$

$\underline{G}_1(p)$ hat demnach bei p_v eine mindestens doppelte Nullstelle, deren Rang r_E größer oder gleich Eins ist. Ist der Rang von $\underline{G}(p_v)$ gleich n , so gilt $r_E = 1$, wie eine Rangbetrachtung zeigt. Besitzt aber $\underline{G}(p)$ a priori eine Nullstelle bei p_v (die ebenfalls mindestens doppelt ist) mit einem Rang größer als Eins, so gilt in diesem Fall wegen $R_v = 0$ für $\underline{G}_1(p)$ natürlich dasselbe. Eine weitere Möglichkeit dafür, daß $r_E > 1$ wird, ist dann gegeben, wenn man anstelle der Matrix $R_v \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T$, die psd vom Rang 1 ist, eine Matrix $\lambda \underline{E}_{nk} \underline{R} \underline{E}_{nk}^T$ von $\underline{G}(p)$ abspaltet, wobei $\underline{R}$ eine konstante psd (k,k) -Diagonalmatrix ist ($k \leq n$) und λ so gewählt wird, daß $\underline{G}_1(p)$ bei p_v eine doppelte Nullstelle besitzt und $\underline{G}_1(p)$ PRM ist.

Das hier beschriebene Syntheseverfahren verläuft für $r_E = 1$ und für $r_E > 1$ in gleicher Weise, jedoch ist im letztgenannten Fall auch der Prozeß von McMillan anwendbar [5], da dieser eine stärkere Gradreduktion pro Entwicklungszyklus ermöglicht.

Der durch die Gln.(2.7 b), (2.8 b) ausgedrückte Sachverhalt kann auch mit Hilfe von Satz 25 formuliert werden. Da $\underline{G}_1(p_v)$ den Rang $n - r_L$ besitzt, wird das homogene, lineare Gleichungssystem

$$\underline{G}_1(p_v) \underline{x} = 0 \quad (2.9a)$$

von genau r_E linear unabhängigen, i.a. komplexen n -Vektoren $\underline{x}$ gelöst. Aus der Menge der r_E Vektoren wählen wir einen, z.B. $\underline{x} = \underline{c}$. Damit ist die Beziehung

$$\underline{G}_1(p_v) \underline{c} = 0 ; \quad \underline{c} = [c_i] , \quad c_1 = -1 \quad (2.9b)$$

gleichbedeutend mit Gl.(2.7 b). Ebenso stellt die Schar dieser Vektoren die Gesamtheit der Lösungen zur Gleichung

$$\underline{x}^T \left(\frac{d\underline{G}_1}{d\underline{p}} \Big|_{\underline{p}=\underline{p}_v} \right) \underline{x} = 0 \quad (2.10a)$$

dar, da die Nullstelle von $\underline{G}_1(p)$ bei p_v doppelt ist. Mit $\underline{x} = \underline{c}$ lautet die zu Gl.(2.8 b) äquivalente Beziehung

$$\underline{c}^T \left(\frac{d\underline{G}_1}{d\underline{p}} \Big|_{\underline{p}=\underline{p}_v} \right) \underline{c} = 0. \quad (2.10b)$$

Die Gln.(2.9 b), (2.10 b) spielen im weiteren eine wichtige Rolle.

Für das Folgende werden nach der Lage der Entwicklungsstellen in der p -Ebene zwei Fälle unterschieden:

Fall 1. p_v liegt auf dem Rand des ersten Quadranten, also auf der

1a) positiv imaginären Achse; z.B. $p_0 = j\omega_0; \omega_0 > 0$, oder der

1b) positiv reellen Achse; z.B. $p_1 = \sigma_1 > 0$.

Fall 2. p_v liegt im Innern des ersten Quadranten; z.B.

$$p_2 = \rho_2 e^{j\varphi_2}; \rho_2 > 0, 0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}.$$

11.2.3. Gradreduktion von $\underline{Z}_1(p)$ durch Entwicklung einer Reaktanzschaltung

11.2.3.1. Entwicklungsstelle auf dem Rand

Die gemeinsame Behandlung der beiden Möglichkeiten von Fall 1 ist dadurch gerechtfertigt, daß die anzustellenden Überlegungen und die resultierende Schaltung bis auf wenige, jedoch nicht grundsätzliche Unterschiede jeweils dieselben sind. Aus diesem Grunde wird zunächst Fall 1a) ¹⁾ vollständig abgehandelt; daran anschließend werden die Abweichungen des Falles 1b) vom Fall 1a) aufgezeigt.

Es sei also $p_0 = j\omega_0$ mit der Einschränkung $\omega_0 \neq 0, \infty$. Ist nämlich $\omega_0 = 0$ oder $\omega_0 = \infty$, so besitzt $\underline{Z}_1$ eine Nullstelle in einem dieser Punkte; diese Nullstellen können aber gemäß Satz 10 von der Inversen von $\underline{Z}_1$ als Pole abgebaut werden. Wegen seiner einfachen Erledigung bedarf dieser Fall also keiner weiteren Diskussion. Aufgrund der Realteilabspaltung im vorigen Abschnitt 11.2.2. be-

1) Die in Fall 1a) gewonnenen Ergebnisse stimmen mit denen von Tellegen [4] überein.

sitzt die Realteilmatrix $\text{Re } \underline{Z}_1(p)$ wegen Gl.(2.9 b) bei $j\omega_0$ eine Nullstelle, während die Imaginärteilmatrix, die auf der $j\omega$ -Achse mit dem ungeraden Teil von $\underline{Z}_1$ identisch ist, i.a. für $j\omega_0$ nichtsingulär sein wird. Man kann jedoch durch die Subtraktion einer geeigneten Matrix von $\underline{Z}_1$ eine neue Matrix $\underline{Z}_2$ gewinnen, die eine Nullstelle bei $j\omega_0$ besitzt. Diese kann von der Umkehrmatrix als Pol abgebaut werden, wodurch sich - wie beabsichtigt - ihr Grad reduziert.

Die abzuspaltende Matrix $\underline{X}(p)$ soll folgende Forderungen erfüllen:

1. Der Realteil der neuen, bei der Subtraktion entstehenden Matrix $\underline{Z}_2$ soll auf der imaginären Achse unverändert bleiben, d.h. es soll gelten $\text{Re } \underline{Z}_2(j\omega) = \text{Re } \underline{Z}_1(j\omega) = \underline{G}_1(j\omega)$; daher muß $\underline{X}$ für $p = j\omega$ rein imaginär sein.
2. Der normale Rang von $\underline{X}$ soll möglichst niedrig sein, damit der Schaltungsaufwand bei der Realisierung möglichst klein bleibt.

Man gibt daher $\underline{X}$ die Form

$$\underline{X}(p) = p \underline{L}_1 \underline{u} \underline{u}^T \quad (\underline{L}_1, \underline{u} \text{ reell}), \quad (2.11)$$

die beiden Anforderungen gerecht wird. $\underline{X}$ hat den normalen Rang Eins; seine Faktoren $\underline{L}_1$ und $\underline{u}$ müssen so bestimmt werden, daß für

$$\underline{Z}_2(p) = \underline{Z}_1(p) - \underline{X}(p) \quad (2.12)$$

mit dem in diesem Fall reellen n -Vektor $\underline{c}$ aus Gl.(2.9 b)

$$\underline{Z}_2(j\omega_0) \cdot \underline{c} = 0 \quad (2.13a)$$

gilt. Genau dann hat $\underline{Z}_2$ die gewünschte Nullstelle. Ausführlicher geschrieben muß mit Gl.(2.11) und mit $\underline{U}_1(j\omega) = j \text{Im } \underline{Z}_1(j\omega)$

$$\{\text{Re } \underline{Z}_1(j\omega_0) + j \text{Im } \underline{Z}_1(j\omega_0) - j\omega_0 \underline{L}_1 \underline{u} \underline{u}^T\} \underline{c} = 0 \quad (2.13b)$$

sein. Dies führt zu den beiden reellen Gleichungen

$$\text{Re } \underline{Z}_1(j\omega_0) \underline{c} = 0, \quad (2.13c)$$

$$\{\text{Im } \underline{Z}_1(j\omega_0) - \omega_0 \underline{L}_1 \underline{u} \underline{u}^T\} \underline{c} = 0, \quad (2.13d)$$

von denen die erste für $p = j\omega_0$ mit Gl.(2.10 b) identisch und somit von selbst erfüllt ist, während Gl.(2.13 d) nur durch passende Wahl von $\underline{L}_1$ und $\underline{u}$ befriedigt werden kann.

Zur Bestimmung dieser Parameter denken wir uns die psd Matrix $\underline{u} \underline{u}^T$ (dyadisches Produkt) vom Rang 1 nach Satz 22 auf ihre Normalform transformiert. Die zunächst unbekannte Transformationsmatrix sei $\underline{T}$. Bei der nachfolgenden Rechnung machen wir von der Darstellung nach Kap. 1.6. Gebrauch und erhalten aus Gl.(2.13 d)

$$\begin{aligned} \underline{T}^T \underline{d} &= \underline{L}_1 \underline{T}^T \underline{u} \underline{u}^T \underline{T} \underline{T}^{-1} \underline{c} \quad , \\ \underline{d} &= \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega_0) \underline{c} \quad , \end{aligned} \quad (2.14)$$

wobei

$$\underline{T}^T \underline{u} \underline{u}^T \underline{T} = \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T \quad . \quad (2.15)$$

Wie angekündigt werden die vorkommenden Vektoren und Matrizen in folgender Weise aufgespalten:

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \underline{E}_{n1} d_1 + \underline{F}_{n,n-1} d_2 \quad , \quad (2.16a)$$

$$\underline{c} = \underline{E}_{n1} c_1 + \underline{F}_{n,n-1} c_2 \quad (\text{nach Gl.(2.9b)} \quad c_1 = -1) \quad (2.16b)$$

$$\underline{u} = \underline{E}_{n1} u_1 + \underline{F}_{n,n-1} u_2 \quad (\text{Vereinbarung } u_1 = 1) \quad (2.16c)$$

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \underline{E}_{n1} t_{n1} \underline{E}_{n1}^T + \underline{E}_{n1} t_{12} \underline{F}_{n,n-1}^T + \underline{F}_{n,n-1} t_{21} \underline{E}_{n1}^T + \\ &\quad + \underline{F}_{n,n-1} t_{22} \underline{F}_{n,n-1}^T \quad . \end{aligned} \quad (2.16d)$$

Aus den Gln.(2.15), (2.16 c) folgt $t_{11} = 1$. Durch Einsetzen von Gl.(2.15) in Gl.(2.14) ergibt sich

$$\underline{T}^T \underline{d} = \underline{L}_1 \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T \underline{c}^{(n)} \quad , \quad (2.17a)$$

wobei

$$\underline{c}^{(n)} = \underline{T}^{-1} \underline{c} \quad . \quad (2.17b)$$

Man ersieht aus Gl.(2.17 a), daß bei dem Vektor auf der linken Seite alle Komponenten außer der ersten verschwinden müssen:

$$\underline{T}^T \underline{d} = \underline{E}_{n1} d_1 \quad (2.18)$$

Zusammen mit den Gln.(2.16 a,d) ergibt diese Beziehung die Bestimmungsgleichung für $\underline{T}$

$$\begin{aligned} \underline{E}_{n1} d_1 &= (\underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T + \underline{E}_{n1} t_{21} \underline{F}_{n,n-1}^T + \underline{F}_{n,n-1} t_{12} \underline{E}_{n1}^T + \\ &\quad + \underline{F}_{n,n-1} t_{22} \underline{F}_{n,n-1}^T) (\underline{E}_{n1} d_1 + \underline{F}_{n,n-1} d_2) \\ &= \underline{E}_{n1} d_1 + \underline{F}_{n,n-1} t_{12}^T d_1 + \underline{E}_{n1} t_{21}^T d_2 + \underline{F}_{n,n-1} t_{22}^T d_2 \quad . \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der linken und rechten Seite erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \underline{t}_2^T &= 0, \\ \underline{t}_2^T \underline{d}_1 + \underline{T}_{22}^T \underline{d}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} (2.19a)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $\underline{T}_{22} = \underline{1}_{n-1}$ gesetzt werden, womit sich

$$\underline{t}_{12} = -\frac{1}{\underline{d}_1} \underline{d}_2^T \quad (2.19b)$$

ergibt, und damit

$$\underline{T} = \underline{1}_n - \frac{1}{\underline{d}_1} \underline{E}_{n1} \underline{d}_2^T \underline{F}_{n,n-1}^T, \quad (2.19c)$$

und - nach einfacher Zwischenrechnung -

$$\underline{T}^{-1} = \underline{1}_n + \frac{1}{\underline{d}_1} \underline{E}_{n1} \underline{d}_2^T \underline{F}_{n,n-1}^T. \quad (2.19d)$$

Durch Einsetzen von $\underline{T}^{-1}$ in $\underline{c}^{(1)}$ nach Gl.(2.17 b) mit $\underline{c}$ aus Gl.(2.16 b) ergibt

$$\begin{aligned} \underline{c}^{(1)} &= (\underline{1}_n + \frac{1}{\underline{d}_1} \underline{E}_{n1} \underline{d}_2^T \underline{F}_{n,n-1}^T) (\underline{E}_{n1} \underline{c}_1 + \underline{F}_{n,n-1} \underline{c}_2) \\ &= \underline{E}_{n1} (\underline{c}_1 + \frac{1}{\underline{d}_1} \underline{d}_2^T \underline{c}_2) + \underline{F}_{n,n-1} \underline{c}_2. \end{aligned}$$

Damit läßt sich L_1 aus Gl.(2.17 a) berechnen:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{n1} \underline{d}_1 &= L_1 \underline{E}_{n1} (\underline{c}_1 + \frac{1}{\underline{d}_1} \underline{d}_2^T \underline{c}_2), \\ L_1 &= \frac{\underline{d}_1^2}{\underline{d}_1 \underline{c}_1 + \underline{d}_2^T \underline{c}_2} = \frac{\underline{d}_1^2}{\underline{d}_1^T \underline{c}}. \end{aligned} \quad (2.20a)$$

Ebenfalls mit $\underline{T}^{-1}$ aus Gl.(2.19 d) bekommt man $\underline{u}_1$ aus Gl.(2.15) zu

$$\begin{aligned} \underline{u} &= (\underline{T}^T)^{-1} \underline{E}_{n1} = (\underline{1}_n + \frac{1}{\underline{d}_1} \underline{F}_{n,n-1} \underline{d}_2 \underline{E}_{n1}^T) \underline{E}_{n1} \\ &= \underline{E}_{n1} + \frac{1}{\underline{d}_1} \underline{F}_{n,n-1} \underline{d}_2, \end{aligned} \quad (2.20b)$$

und damit aus Gl.(2.16 b) die noch unbekannte Größe

$$\underline{u}_2 = \frac{1}{\underline{d}_1} \underline{d}_2. \quad (2.20c)$$

L_1 nach Gl.(2.20 a) läßt sich mit $\underline{d}$ nach Gl.(2.14) auch anders darstellen:

$$L_1 = \frac{\omega_0 d_1^2}{\underline{c}^T \operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega_0) \underline{c}} \quad (2.20d)$$

L_1 ist beider Vorzeichen fähig, weil $\operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega_0)$ weder psd noch nsd ist. Es ist nun möglich, $\underline{X}(p)$ nach Gl.(2.11) nur mit Hilfe bekannter Größen auszudrücken:

$$\frac{1}{p} \underline{X}(p) = \underline{u} \underline{u}^T L_1 = \frac{\operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega_0) \underline{c} \underline{c}^T \operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega_0)}{\omega_0 \underline{c}^T \operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega_0) \underline{c}} \quad (2.20e)$$

Hierbei wurde von der Beziehung

$$\underline{u} = \frac{1}{d_1} \underline{d} = \frac{1}{\omega_0 d_1} \operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega_0) \underline{c}$$

Gebrauch gemacht.

Nach zwei Abspaltschritten erhält man unter Verwendung der Gln. (2.6), (2.11), (2.12) für $\underline{Z}$ die Darstellung

$$\underline{Z} = R_0 \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T + p L_1 \underline{u} \underline{u}^T + \underline{Z}_2 \quad (R_0 > 0, L_1 \leq 0). \quad (2.21)$$

Die Schaltung von $\underline{Z}$ nach Gl.(2.21) kann nach den Methoden von Teil I gewonnen werden und ist in Bild 14 veranschaulicht.

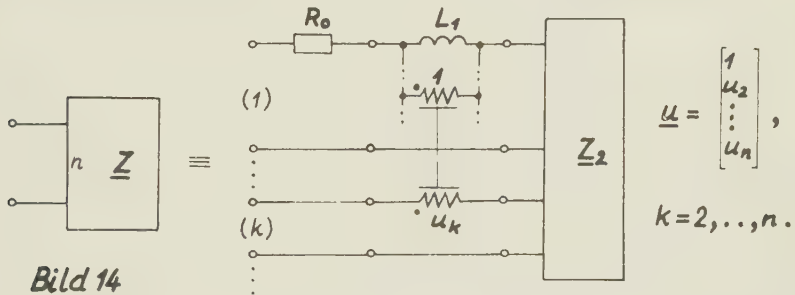


Bild 14

Wir kehren zurück zu $\underline{Z}_2$ gemäß Gl.(2.12), das mit den berechneten Werten für L_1 und $\underline{u}$ die gewünschte Nullstelle bei $p = j\omega_0$ besitzt. Infolge der Subtraktion von $\underline{X}(p)$ ist der Grad von $\underline{Z}_2$ jedoch um Eins größer als der Grad von $\underline{Z}_1$ bzw. $\underline{Z}$. $\underline{Z}_2$ ist nicht notwendig PRM, nämlich genau dann nicht, wenn $L_1 > 0$ ist. Der künstlich erzeugte Pol von $\underline{Z}_2$ bei $p = \infty$ besitzt in diesem Fall ein nsd Residuum; von dieser Ausnahme abgesehen weist $\underline{Z}_2$ alle Eigenschaften einer symmetrischen PRM auf.

Die Inverse von $\underline{Z}_2$, $\underline{Y}_2$, läßt sich den Sätzen 9 und 10 zufolge in die drei Summanden

$$\underline{Z}_2^{-1} = \underline{Y}_2 = \frac{\underline{P}_0}{p - j\omega_0} + \frac{\underline{P}_0}{p + j\omega_0} + \underline{Y}_3 \quad (2.22)$$

zerlegen. $\underline{Y}_3$ ist bei $p = \pm j\omega_0$ regulär, d.h. polfrei, und hat außer der Nullstelle bei $p = \infty$ in der ganzen abgeschlossenen rechten p -Halbebene keine Pole und Nullstellen mehr. Um die beiden Polteile von Gl.(2.22) realisieren zu können, muß $\underline{P}_0$ bestimmt werden. Zunächst ist allgemein

$$\underline{P}_0 = (p - j\omega_0) \underline{Z}_2^{-1}(p) \big|_{p=j\omega_0} . \quad (2.23)$$

Zur Berechnung von $\underline{P}_0$ sollen hier zwei verschiedene Verfahren vorgeführt werden. Beiden liegen jedoch die gleichen, in den Gln.(2.10 b), (2.13 a) ausgedrückten Voraussetzungen zugrunde.

1. Verfahren: Da man die Inverse einer Matrix $\underline{A}(p)$ durch ihre Determinante $\det \underline{A}$ und ihre adjungierte Matrix $\underline{A}_{adj}$ gemäß der Gleichung

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\underline{A}_{adj}}{\det \underline{A}}$$

ausdrücken kann, gilt sinngemäß für $\underline{P}_0$ nach Gl.(2.23)

$$\underline{P}_0 = (p - j\omega_0) \frac{\underline{Z}_2(p)_{adj}}{\det \underline{Z}_2(p)} \big|_{p=j\omega_0} .$$

Wegen Gl.(2.13 a) lautet die Taylor-Entwicklung von $\det \underline{Z}_2(p)$ in der Umgebung von $p = j\omega_0$

$$\det \underline{Z}_2(p) = (p - j\omega_0) \{ \det \underline{Z}_2(p) \}' \big|_{p=j\omega_0} + \dots ,$$

womit sich für $\underline{P}_0$ ergibt:

$$\underline{P}_0 = \frac{\underline{Z}_2(p)_{adj}}{\{ \det \underline{Z}_2(p) \}' } \big|_{p=j\omega_0} = \frac{\underline{Z}_2(j\omega_0)_{adj}}{\{ \det \underline{Z}_2(p) \}' \big|_{p=j\omega_0}} \quad (2.24)$$

Der einfacheren Schreibung wegen kürzen wir ab

$$\underline{Z}_2(j\omega_0)_{adj} = \underline{\zeta} = [\zeta_{ik}] \quad (i, k = 1, \dots, n). \quad (2.25a)$$

Es zeigt sich, daß mit dem Vektor $\underline{c}$ nach Gl.(2.9 b)

$$\underline{\zeta} = K_{\zeta} \underline{c} \underline{c}^T \quad (2.25b)$$

gilt, wobei K_{ζ} eine Konstante ist. Dies geht hervor einerseits aus Gl.(2.13 a), andererseits aus dem allgemein gültigen Zu-

sammenhang [15]

$$\underline{A} \underline{A}_{adj} = \underline{I}_n \det \underline{A} ,$$

der speziell auf $\underline{A} = \underline{Z}_2(j\omega_0)$ anzuwenden ist. Der Vergleich beider Beziehungen führt - der Argumentation von Cederbaum [16] folgend - zwangsläufig zu Gl.(2.25 b).

Zur Berechnung des Nenners von Gl.(2.24) benutzen wir einen Ausdruck, der die Ableitung einer Matrizendeterminante mit Hilfe der abgeleiteten Matrizen- und der Adjunktenelemente darstellt [15]. Der Ausdruck lautet für $\underline{Z}_2(p) = [Z_{ik,2}]$

$$\{ \det \underline{Z}_2(p) \}' \big|_{p=j\omega_0} = \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{dZ_{ik,2}}{dp} \big|_{p=j\omega_0} \right) \xi_{ik} ,$$

oder mit Gl.(2.25 b)

$$\{ \det \underline{Z}_2(p) \}' \big|_{p=j\omega_0} = K_{\xi} \underline{c}^T \frac{d\underline{Z}_2(p)}{dp} \big|_{p=j\omega_0} \underline{c} . \quad (2.26a)$$

Wählt man für die Ableitung $dp = d(j\omega)$, so erkennt man unmittelbar, daß wegen Gl.(2.10 b) der Imaginärteil der in Gl.(2.26 a) angeschriebenen quadratischen Form verschwindet:

$$\begin{aligned} \underline{c}^T \frac{d \operatorname{Re} \underline{Z}_2(j\omega)}{d(j\omega)} \big|_{\omega=\omega_0} \underline{c} &= \underline{c}^T \frac{d \underline{G}_2(j\omega)}{d(j\omega)} \big|_{\omega=\omega_0} \underline{c} \\ &= \underline{c}^T \frac{d \underline{G}_1(j\omega)}{d(j\omega)} \big|_{\omega=\omega_0} \underline{c} = 0 \end{aligned} \quad (2.26b)$$

Damit bleibt in Gl.(2.26 a) nur der Realteil

$$\{ \det \underline{Z}_2(p) \}' \big|_{p=j\omega_0} = K_{\xi} \underline{c}^T \frac{d \operatorname{Im} \underline{Z}_2(j\omega)}{d\omega} \big|_{\omega=\omega_0} \underline{c} \quad (2.26c)$$

übrig, der sich - abgesehen von der Konstanten K_{ξ} - mit den Gln.(2.12), (2.20 f) wie folgt darstellen läßt:

$$\underline{c}^T \frac{d \operatorname{Im} \underline{Z}_2(j\omega)}{d\omega} \big|_{\omega=\omega_0} \underline{c} = \underline{c}^T \frac{d \operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega)}{d\omega} \big|_{\omega=\omega_0} \underline{c} - \underline{c}^T \frac{\operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega_0)}{\omega_0} \underline{c}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nach Satz 15, Gl.(1.25), positiv, da $\underline{c}^T \underline{Z}_1 \underline{c}$ eine PRF darstellt. Durch Einsetzen der Gln.(2.25 b), (2.26 c) in Gl.(2.24) und unter Berücksichtigung des eben gewonnenen Ergebnisses erhält man schließlich $\underline{P}_0$ zu

$$\underline{P}_0 = \frac{\underline{C} \underline{C}^T}{\underline{C}^T \left\{ \frac{d \operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} - \frac{\operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega_0)}{\omega_0} \right\} \underline{C}} = \frac{\underline{C} \underline{C}^T}{Q_0}, \quad (Q_0 > 0). \quad (2.27)$$

2. Verfahren : Dieses Verfahren macht im wesentlichen Gebrauch von den Theoremen 1 und 2 der Arbeit [17] von Bélévitch. Wir gehen aus von der Taylor-Entwicklung der Matrix $\underline{Z}_2(p)$ in der Umgebung von $p = j\omega_0$.

$$\underline{Z}_2(p) = \underline{Z}_2(j\omega_0) + (p - j\omega_0) \frac{d\underline{Z}_2}{dp} \Big|_{p=j\omega_0} + \dots \quad (2.28)$$

Ebenfalls in der Umgebung von $p = j\omega_0$ kann $\underline{Y}_2$ für unsere Zwecke wie folgt geschrieben werden:

$$\underline{Y}_2 = \frac{\underline{P}_0}{p - j\omega_0} + \underline{Y}_r \quad (2.29)$$

Mit $\underline{Y}_2 \underline{Z}_2 = \underline{1}_n$ erhalten wir aus den Gln. (2.28), (2.29) bei Berücksichtigung der Glieder nullter und erster Ordnung in $(p - j\omega_0)$

$$\underline{P}_0 \underline{Z}_2(j\omega_0) = 0, \quad (2.30a)$$

$$\underline{P}_0 \frac{d\underline{Z}_2(p)}{dp} \Big|_{p=j\omega_0} + \underline{Y}_r \underline{Z}_2(j\omega_0) = \underline{1}_n. \quad (2.30b)$$

Durch Einsetzen der Gl. (2.13 a) in Gl. (2.30 b) ergibt sich

$$\underline{P}_0 \frac{d\underline{Z}_2(p)}{dp} \Big|_{p=j\omega_0} \underline{C} = \underline{C}. \quad (2.30c)$$

Das unbekannte Residuum $\underline{P}_0$ muß symmetrisch sein und die Gln. (2.30 a, c) befriedigen. Man kann leicht zeigen, daß nur

$$\underline{P}_0 = \underline{C} \left(\underline{C}^T \frac{d\underline{Z}_2(p)}{dp} \Big|_{p=j\omega_0} \underline{C} \right)^{-1} \underline{C}^T \quad (2.31)$$

all diese Bedingungen erfüllt. Damit $\underline{P}_0$ existiert, muß der in Klammern stehende Ausdruck von Gl. (2.31) ungleich Null sein; dies wurde in den Gln. (2.26 a-c) nachgewiesen, es galt sogar

$$\underline{C}^T \frac{d\underline{Z}_2(p)}{dp} \Big|_{p=j\omega_0} \underline{C} = Q_0 > 0.$$

Damit geht Gl. (2.31) über in

$$\underline{P}_0 = \frac{\underline{C} \underline{C}^T}{Q_0}. \quad (2.32)$$

Das Ergebnis stimmt erwartungsgemäß mit Gl. (2.27) überein.

sammenhang [15]

$$\underline{A} \underline{A}_{adj} = \underline{1}_n \det \underline{A} ,$$

der speziell auf $\underline{A} = \underline{Z}_2(j\omega_0)$ anzuwenden ist. Der Vergleich beider Beziehungen führt - der Argumentation von Cederbaum [16] folgend - zwangsläufig zu Gl.(2.25 b).

Zur Berechnung des Nenners von Gl.(2.24) benutzen wir einen Ausdruck, der die Ableitung einer Matrizendeterminante mit Hilfe der abgeleiteten Matrizen- und der Adjunktelemente darstellt [15]. Der Ausdruck lautet für $\underline{Z}_2(p) = [Z_{ik,2}]$

$$\{ \det \underline{Z}_2(p) \}' \big|_{p=j\omega_0} = \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{dZ_{ik,2}}{dp} \big|_{p=j\omega_0} \right) \xi_{ik} ,$$

oder mit Gl.(2.25 b)

$$\{ \det \underline{Z}_2(p) \}' \big|_{p=j\omega_0} = K_5 \underline{c}^T \frac{d\underline{Z}_2(p)}{dp} \big|_{p=j\omega_0} \underline{c} . \quad (2.26a)$$

Wählt man für die Ableitung $dp = d(j\omega)$, so erkennt man unmittelbar, daß wegen Gl.(2.10 b) der Imaginärteil der in Gl.(2.26 a) angeschriebenen quadratischen Form verschwindet:

$$\begin{aligned} \underline{c}^T \frac{d \operatorname{Re} \underline{Z}_2(j\omega)}{d(j\omega)} \big|_{\omega=\omega_0} \underline{c} &= \underline{c}^T \frac{d \underline{G}_2(j\omega)}{d(j\omega)} \big|_{\omega=\omega_0} \underline{c} \\ &= \underline{c}^T \frac{d \underline{G}_r(j\omega)}{d(j\omega)} \big|_{\omega=\omega_0} \underline{c} = 0 \end{aligned} \quad (2.26b)$$

Damit bleibt in Gl.(2.26 a) nur der Realteil

$$\{ \det \underline{Z}_2(p) \}' \big|_{p=j\omega_0} = K_5 \underline{c}^T \frac{d \operatorname{Im} \underline{Z}_2(j\omega)}{d\omega} \big|_{\omega=\omega_0} \underline{c} \quad (2.26c)$$

übrig, der sich - abgesehen von der Konstanten K_5 - mit den Gln.(2.12), (2.20 f) wie folgt darstellen läßt:

$$\underline{c}^T \frac{d \operatorname{Im} \underline{Z}_2(j\omega)}{d\omega} \big|_{\omega=\omega_0} \underline{c} = \underline{c}^T \frac{d \operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega)}{d\omega} \big|_{\omega=\omega_0} \underline{c} - \underline{c}^T \frac{\operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega_0)}{\omega_0} \underline{c}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nach Satz 15, Gl.(1.25), positiv, da $\underline{c}^T \underline{Z}_1 \underline{c}$ eine PRF darstellt. Durch Einsetzen der Gln. (2.25 b), (2.26 c) in Gl.(2.24) und unter Berücksichtigung des eben gewonnenen Ergebnisses erhält man schließlich $\underline{P}_0$ zu

$$\underline{P}_0 = \frac{\underline{C} \underline{C}^T}{\underline{C}^T \left\{ \frac{d \operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} - \frac{\operatorname{Im} \underline{Z}_1(j\omega_0)}{\omega_0} \right\} \underline{C}} = \frac{\underline{C} \underline{C}^T}{Q_0}, \quad (Q_0 > 0). \quad (2.27)$$

2. Verfahren : Dieses Verfahren macht im wesentlichen Gebrauch von den Theoremen 1 und 2 der Arbeit [17] von Bélévitch. Wir gehen aus von der Taylor-Entwicklung der Matrix $\underline{Z}_2(p)$ in der Umgebung von $p = j\omega_0$

$$\underline{Z}_2(p) = \underline{Z}_2(j\omega_0) + (p - j\omega_0) \frac{d\underline{Z}_2}{dp} \Big|_{p=j\omega_0} + \dots \quad (2.28)$$

Ebenfalls in der Umgebung von $p = j\omega_0$ kann $\underline{Y}_2$ für unsere Zwecke wie folgt geschrieben werden:

$$\underline{Y}_2 = \frac{\underline{P}_0}{p - j\omega_0} + \underline{Y}_r \quad (2.29)$$

Mit $\underline{Y}_2 \underline{Z}_2 = \underline{1}_n$ erhalten wir aus den Gln. (2.28), (2.29) bei Berücksichtigung der Glieder nullter und erster Ordnung in $(p - j\omega_0)$

$$\underline{P}_0 \underline{Z}_2(j\omega_0) = 0, \quad (2.30a)$$

$$\underline{P}_0 \frac{d\underline{Z}_2(p)}{dp} \Big|_{p=j\omega_0} + \underline{Y}_r \underline{Z}_2(j\omega_0) = \underline{1}_n. \quad (2.30b)$$

Durch Einsetzen der Gl. (2.13 a) in Gl. (2.30 b) ergibt sich

$$\underline{P}_0 \frac{d\underline{Z}_2(p)}{dp} \Big|_{p=j\omega_0} \underline{C} = \underline{C}. \quad (2.30c)$$

Das unbekannte Residuum $\underline{P}_0$ muß symmetrisch sein und die Gln. (2.30 a, c) befriedigen. Man kann leicht zeigen, daß nur

$$\underline{P}_0 = \underline{C} \left(\underline{C}^T \frac{d\underline{Z}_2(p)}{dp} \Big|_{p=j\omega_0} \underline{C} \right)^{-1} \underline{C}^T \quad (2.31)$$

all diese Bedingungen erfüllt. Damit $\underline{P}_0$ existiert, muß der in Klammern stehende Ausdruck von Gl. (2.31) ungleich Null sein; dies wurde in den Gln. (2.26 a-c) nachgewiesen, es galt sogar

$$\underline{C}^T \frac{d\underline{Z}_2(p)}{dp} \Big|_{p=j\omega_0} \underline{C} = Q_0 > 0.$$

Damit geht Gl. (2.31) über in

$$\underline{P}_0 = \frac{\underline{C} \underline{C}^T}{Q_0}. \quad (2.32)$$

Das Ergebnis stimmt erwartungsgemäß mit Gl. (2.27) überein.

Durch die Abspaltung der beiden Pole von $\underline{Y}_2$ nach Gl.(2.22) - die beiden Terme stellen eine symmetrische PRM $\underline{Y}_q$ vom Grad zwei dar - erhält man mit $\underline{Y}_3$ eine Matrix, welche - abgesehen von der Gradverminderung um zwei - dieselben funktionentheoretischen Eigenschaften wie $\underline{Y}_2$ besitzt.

Nach dem Abbau des Poles bei $p = \infty$ von der Kehrmatrix $\underline{Y}_3^{-1}$ ist die Restmatrix zwangsläufig wieder PRM. Ehe wir darauf eingehen, soll die Schaltung der oben erwähnten Matrix $\underline{Y}_q$ angegeben werden. Wir wenden hierzu die duale Version von Satz 10 auf Gl. (2.22) an und erhalten sofort die schaltungsmäßige Repräsentation von $\underline{Y}_2$ als Parallelschaltung der Realisierung von $\underline{Y}_q$ und des n-Tors, das durch $\underline{Y}_3$ beschrieben wird (Bild 15).

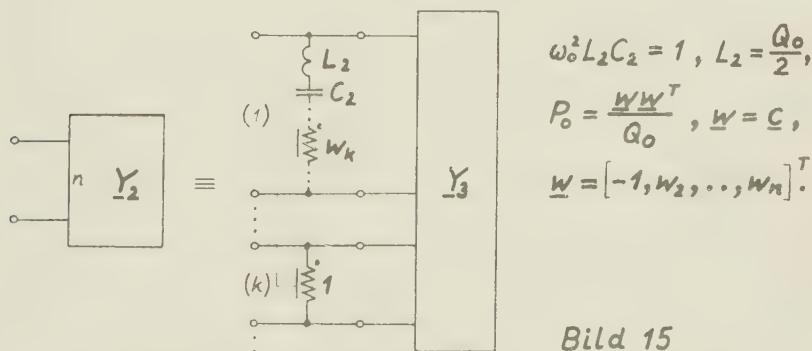


Bild 15

Wir kehren zurück zu $\underline{Y}_3$, von deren inverser Matrix wir im letzten Teil des Entwicklungszyklus den Pol bei $p = \infty$ mit noch unbekanntem Residuum $\underline{L}_{III}$ abspalten:

$$\underline{Y}_3^{-1} = \underline{Z}_3 = p \underline{L}_{III} + \underline{Z}_4 \quad (2.33)$$

Mit $p \underline{L}_{III}$ ist derjenige Term isoliert, der die Passivität von $\underline{Y}_3$ möglicherweise beeinträchtigt; daher ist jedenfalls $\underline{Z}_4$ Impedanzmatrix. Zur Bestimmung von $\underline{L}_{III}$ rekapitulieren wir zweckmäßig die beiden vorangegangenen Abspaltsschritte.

Erste Abspaltung nach Gl.(2.12):

$$\underline{Z}_2(p) = \underline{Z}_1(p) - p \underline{L}_1 \underline{u} \underline{u}^T \quad (L_1 \geq 0, \underline{u} \text{ reell}) \quad (2.34a)$$

Zweite Abspaltung nach Gl.(2.22):

$$\underline{Y}_3(p) = \underline{Z}_2^{-1}(p) - \frac{p C_2}{p^2 L_2 C_2 + 1} \underline{w} \underline{w}^T \quad (L_2, C_2 > 0; \underline{w} \text{ reell}) \quad (2.34b)$$

Durch Einsetzen der Gl. (2.34 a) in Gl. (2.34 b) erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3(p) &= \left\{ \underline{Z}_2^{-1}(p) - \frac{p C_2}{p^2 L_2 C_2 + 1} \underline{w} \underline{w}^T \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \left(\underline{Z}_2(p) - p L_2 \underline{u} \underline{u}^T \right)^{-1} - \frac{p C_2}{p^2 L_2 C_2 + 1} \underline{w} \underline{w}^T \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

und nach der Invertierung der mit (-1) potenzierten Matrizen

$$\underline{Z}_3 \left\{ -\frac{p C_2}{p^2 L_2 C_2 + 1} \underline{w} \underline{w}^T (\underline{Z}_2 - p L_2 \underline{u} \underline{u}^T) + \underline{1}_n \right\} = \underline{Z}_2 - p L_2 \underline{u} \underline{u}^T. \quad (2.35a)$$

Für $p \rightarrow \infty$ geht diese Gleichung über in

$$\frac{\underline{Z}_3}{p} \Big|_{p \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{\underline{w} \underline{w}^T}{L_2} \left(\frac{\underline{Z}_2}{p} \Big|_{p \rightarrow \infty} - L_2 \underline{u} \underline{u}^T \right) + \underline{1}_n \right\} = \frac{\underline{Z}_2}{p} \Big|_{p \rightarrow \infty} - L_2 \underline{u} \underline{u}^T. \quad (2.35b)$$

Voraussetzungsgemäß waren $\underline{Z}_1(p)$ und $\underline{Z}_4(p)$ bei $p = \infty$ regulär, weshalb sich die obige Beziehung vereinfacht zu

$$\underline{L}_{III} \left\{ \frac{L_2}{L_1} \underline{w} \underline{w}^T \underline{u} \underline{u}^T + \underline{1}_n \right\} = -L_2 \underline{u} \underline{u}^T. \quad (2.36)$$

Man sieht unmittelbar, daß $\underline{L}_{III}$ von der Form

$$\underline{L}_{III} = L_2 \underline{u} \underline{u}^T$$

sein muß. Mit diesem Ansatz für $\underline{L}_{III}$ liefert Gl. (2.36) einen aufschlußreichen Ausdruck, der die Induktivitäten L_1, L_2, L_3 und die Vektoren der Übersetzungsverhältnisse verknüpft:

$$L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1 \underline{w}^T \underline{u} \underline{u}^T \underline{w} = 0$$

Mit $\underline{w}^T \underline{u} = \underline{u}^T \underline{w}$ wird daraus

$$L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1 (\underline{u}^T \underline{w})^2 = 0. \quad (2.37)$$

Gl. (2.37) kann offenbar nur dann befriedigt werden, wenn wegen $L_2 > 0$ gleichzeitig $L_3 L_1 < 0$ ist. Die Induktivitäten L_1 und L_3 besitzen demnach umgekehrte Vorzeichen, was auch nach den vorangegangenen Betrachtungen einleuchtend ist. Die Gl. (2.37) spielt auch bei den Äquivalenzbetrachtungen in Abschn. 11.2.4.1. eine wichtige Rolle.

Über die Restmatrix $\underline{Z}_4$ läßt sich nun noch ergänzend sagen, daß ihr Grad - bedingt durch die Abspaltung von $p L_3 \underline{u} \underline{u}^T$ - um eins geringer ist als der Grad von $\underline{Y}_3$. Insgesamt konnten wir im Ver-

laufe des Entwicklungszyklus eine Gradreduktion um zwei erreichen, da nach der ersten Graderhöhung um eins eine Graderhöhung um drei folgte.

Die Schaltung für den zuletzt abgespaltenen Pol braucht nicht gesondert angegeben zu werden, da man sie direkt aus derjenigen für $pL_1 u \underline{u}^T$ nach der Vertauschung von L_3 und L_1 bekommt. Man kann damit durch Zusammenfassung der Ergebnisse, die bei der Herleitung des Entwicklungszyklus gewonnen wurden, die Schaltung für $\underline{Z}$ als ein an n Toren mit der Schaltung von $\underline{Z}_4$ abgeschlossenes $2n$ -Tor darstellen (Bild 16).

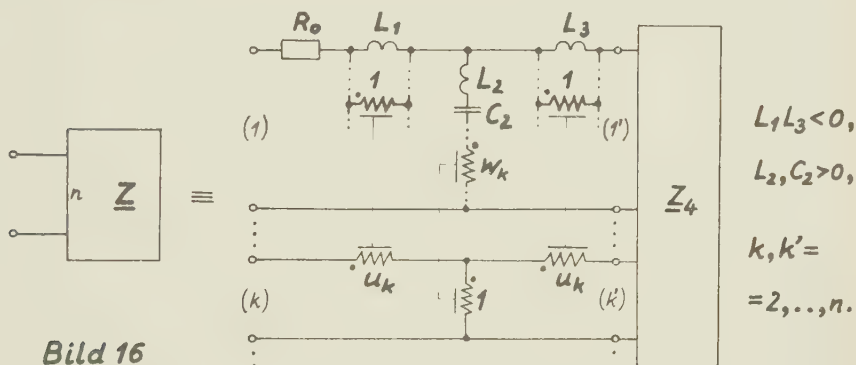


Bild 16

Natürlich ist das in Bild 16 gezeigte, über die Tore (1) bis (n) und (1') bis (n') zugängliche $2n$ -Tor in dieser Form nicht realisierbar, da es eine negative Induktivität (L_1 oder L_3) enthält. Auch scheint dieses Netzwerk entgegen der früheren Ankündigung nicht kanonisch zu sein, da es mehr Reaktanzen benötigt, als der Gradverminderung von $\underline{Z}_4$ gegenüber $\underline{Z}$ entspricht. Beide Mängel können jedoch durch die Konstruktion einer äquivalenten Schaltung beseitigt werden, wie in Abschn. II.2.4. gezeigt werden wird.

Anschließend soll untersucht werden, inwieweit die bislang angestellten Überlegungen für den Fall gelten, daß die Entwicklungsstelle auf der positiv reellen Achse der p -Ebene liegt. Zunächst läßt sich pauschal die Aussage machen, daß die Unterschiede zwischen beiden Entwicklungszyklen nicht grundsätzlicher Art sind. Dies manifestiert sich auch in der Tatsache, daß die

aus dem Zyklus. resultierende Schaltung ihrer Struktur nach mit der in Bild 16 gezeigten übereinstimmt.

Die Begründung für diese Behauptung sollen die folgenden, mehr ins einzelne gehenden Ausführungen liefern. Für die Entwicklungsstelle im Fall 1b), der am Ende von Abschn. II.2.2. erwähnt wurde, gilt $p_1 = \sigma_1 > 0$. Durch die an $\underline{G}$ vorgenommene Abspaltung von $R_1 E_{n1} E_{n1}^T$ haben wir eine Matrix $\underline{Z}_1 = \underline{G}_1 + \underline{U}_1$ erhalten, deren gerader Teil bei σ_1 eine Nullstelle mit den in Abschn. II.2.2. beschriebenen und in den Gln.(2.9 b), (2.10 b) zum Ausdruck kommenden Eigenschaften hat. Die Abspaltung einer Matrix $\underline{X} = p L_1 \underline{u} \underline{u}^T$ von $\underline{Z}_1$ (Gl.(2.11)) vollzieht sich in bekannter Weise und zu bekanntem Zweck, nämlich zur Erzeugung der Nullstelle von $\underline{Z}_2$ bei σ_1 . An dieser Stelle sind aber folgende Abweichungen zu beachten:

$$\text{statt Gl.(2.20 d): } L_1 = \frac{\sigma_1^2 d_1^2}{\underline{c}^T \underline{U}_1(\sigma_1) \underline{c}} \quad , \quad (2.38a)$$

$$\text{statt } \underline{d} = \frac{1}{\omega_0} / m \underline{Z}_1(j\omega_0) \underline{c} : \underline{d} = \frac{1}{\sigma_1} \underline{U}_1(\sigma_1) \underline{c} \quad (\underline{c} \text{ reell}) \quad . \quad (2.38b)$$

Somit ist sicher $L_1 > 0$, da die quadratische Form im Nenner von Gl.(2.38 a) wegen der Positivität von $\underline{Z}_1$ und speziell von $\underline{Z}_1(\sigma_1) = \underline{U}_1(\sigma_1)$ selbst positiv ist.

Außer bei $p = +\sigma_1$ besitzt $\underline{Z}_2$ auch bei $p = -\sigma_1$ noch eine Nullstelle. Dies läßt sich einfach dadurch begründen, daß einerseits $\underline{Z}_2(p) = \underline{G}_1(p)$ als gerader Teil von $\underline{Z}_1$ sowieso an beiden Stellen Null ist, und daß zum andern wegen $\underline{U}_2(\sigma_1) = \underline{U}_1(\sigma_1) - \sigma_1 L_1 \underline{u} \underline{u}^T$ und $\underline{U}_2(\sigma_1) \underline{c} = 0$ (Nullstelle bei $+\sigma_1$) natürlich auch $\underline{U}_2(-\sigma_1) = -\underline{U}_2(\sigma_1)$ ist, weshalb auch $\underline{U}_2(-\sigma_1) \underline{c} = 0$ gelten muß. Die beiden Nullstellen werden von der Inversen der Matrix $\underline{Z}_2$ - die wegen $L_1 > 0$ sicher nicht PRM ist - als Pole abgespalten.

$$\underline{Z}_2' = \underline{Y}_2 = \frac{P_{\sigma_1}}{p - \sigma_1} + \frac{P_{(-\sigma_1)}}{p + \sigma_1} + \underline{Y}_3 \quad (2.39)$$

$\underline{Y}_3$ ist im Gegensatz zu $\underline{Y}_2$ symmetrische PRM, da mit dem Polteil $P_{\sigma_1} / (p - \sigma_1)$ in Gl.(2.39) der einzige Term von $\underline{Y}_2$ isoliert worden ist, der die Positivität dieser Matrix gestört hatte. Für das Polresiduum P_{σ_1} gelten nun wieder andere Überlegungen als an entsprechender Stelle im Fall 1a):

$$\text{statt Gl.(2.27): } P_{\sigma_1} = \frac{\underline{c} \underline{c}^T}{\underline{c}^T \left\{ \frac{d\underline{U}_1(\sigma)}{d\sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_1} - \frac{\underline{U}_1(\sigma_1)}{\sigma_1} \right\} \underline{c}} = \frac{\underline{c} \underline{c}^T}{Q_1} \quad (2.40)$$

Für $p = \sigma_1$ ist nun

$$\underline{c}^T \left\{ \frac{d\underline{U}_1(\sigma)}{d\sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_1} - \frac{\underline{U}_1(\sigma_1)}{\sigma_1} \right\} \underline{c} = \underline{c}^T \left\{ \frac{d\underline{Z}_1(\sigma)}{d\sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_1} - \frac{\underline{Z}_1(\sigma_1)}{\sigma_1} \right\} \underline{c}. \quad (2.41)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gerade in σ und hat somit für $p = \pm \sigma_1$ jeweils denselben Wert. Die rechte Seite ist nach Satz 15, Gl.(1.26), negativ, da $\underline{c}^T \underline{Z}_1(p) \underline{c}$ eine PRF darstellt. Zusammengefaßt bekommen wir aus den Gln.(2.40), (2.41)

$$P_{\sigma_1} = P_{(-\sigma_1)} = P_1 = \frac{\underline{c} \underline{c}^T}{Q_1} \quad (Q_1 < 0) \quad (2.42)$$

Bei Zusammenfassung der beiden Polteile zu

$$\underline{Y}_q = \frac{2p}{p^2 - \sigma_1^2} \frac{\underline{c} \underline{c}^T}{Q_1}$$

führt Gl.(2.39) auf die in Bild 15 vorgestellte Schaltung für $\underline{Y}_2$. Dabei ist

$$L_2 = \frac{Q_1}{2} \quad ; \quad -\sigma_1^2 L_2 C_2 = 1 \quad ; \quad \text{d.h. } L_2 < 0, C_2 > 0 \quad ; \quad \underline{w} = \underline{c}. \quad (2.43)$$

Zuletzt muß jetzt noch der Pol bei $p = \infty$ von $\underline{Z}_3$, der Inversen von $\underline{Y}_3$, abgespalten werden. Die Existenz dieses Poles kann man wie an früherer Stelle nachweisen. Das Polresiduum ist psd, da $\underline{Z}_3$ selbst Impedanzmatrix ist.

$$\underline{Z}_3(p) = p L_3 \underline{u} \underline{u}^T + \underline{Z}_4(p) \quad (L_3 > 0, \underline{Z}_4 \text{ PRM}) \quad (2.44)$$

Gl.(2.37) behält auch hier ihre Gültigkeit. Man sollte jedoch beachten, daß die Vorzeichen der L_1 ($i = 1, 2, 3$) allgemein festliegen, während es im Fall 1a) vom jeweiligen Zahlenbeispiel abhängt, ob L_1 oder L_3 negativ ist. Der Vollständigkeit wegen wird noch darauf hingewiesen, daß wir für $\underline{Z}$ die in Bild 16 gezeigte Schaltung erhalten, die wegen $L_2 < 0$ bekanntlich nicht realisierbar ist. Es ist zu beachten, daß der Widerstand R_1 an die Stelle von R_0 tritt, und daß L_1, L_3 und C_2 positiv sind. Die Entwicklung einer ausführbaren Schaltungsvariante ist dem Abschnitt II.2.4. vorbehalten.

11.2.3.2. Entwicklungsstelle im Innern des ersten Quadranten

Im Fall 2 wird die Entwicklungsstelle durch den komplexen Zeiger $p_2 = \rho_2 e^{j\varphi_2} = a + jb$ beschrieben. Da die Stelle nicht auf dem Rand des ersten Quadranten liegt, gilt einerseits für den Betrag ρ_2 und das Argument φ_2

$$\rho_2 > 0, \quad 0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2},$$

andererseits für die rechtwinkligen Koordinaten a und b

$$a > 0, \quad b > 0.$$

Der gerade Teil von $\underline{Z}_1$, $\underline{C}_1$, hat bei p_2 eine mindestens doppelte Nullstelle¹⁾; dieser Sachverhalt wird durch die Gl.n. (2.9 b), (2.10 b) ausgedrückt. Der Vektor $\underline{c}$ ist jetzt i.a. komplex; seine Aufspaltung in Real- und Imaginärteil lautet

$$\underline{c} = \underline{c}_r + j\underline{c}_i. \quad (2.45)$$

Wie schon in dem einfacheren Fall der rein imaginären oder rein reellen Entwicklungsstelle kann man auch hier durch die Subtraktion einer geeigneten Matrix $\underline{X}(p)$ von $\underline{Z}_1$ erreichen, daß die als Differenz entstehende Matrix $\underline{Z}_2$ an der Entwicklungsstelle singular wird. Dadurch wird die Abspaltung mehrerer Pole von der Umkehrmatrix möglich, womit eine entsprechende Gradreduktion verbunden ist. Für die genannte Matrix $\underline{X}(p)$ wählen wir den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \underline{X}(p) &= pL_1 \underline{u}_L \underline{u}_L^T + \frac{1}{pC_1} \underline{u}_C \underline{u}_C^T, \\ (L_1, C_1 > 0; \underline{u}_L, \underline{u}_C \text{ reell; } \underline{u}_{L1} = \underline{u}_{C1} = 1) \end{aligned} \right\} (2.46)$$

Diese Wahl von $\underline{X}(p)$ wurde getroffen einerseits im Hinblick auf die spätere Realisierung ($\underline{X}$ ist symmetrische PRM), andererseits mit Rücksicht darauf, daß der gerade Teil von $\underline{Z}_1$ bei der Abspaltung unverändert bleiben soll, weil dieser bei p_2 schon singular ist. Auch der Realteil von $\underline{Z}_2$ ist dann auf der $j\omega$ -Achse derselbe wie bei $\underline{Z}_1$. Bilden wir nun die neue Matrix

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 - \underline{X} = \underline{Z}_1 - pL_1 \underline{u}_L \underline{u}_L^T - \frac{1}{pC_1} \underline{u}_C \underline{u}_C^T, \quad (2.47)$$

1) Auf der imaginären Achse sei der Realteil von $\underline{Z}_1$ überall pd.

so drückt sich deren Singularität bei p_2 in der Gleichung

$$\underline{Z}_2(p_2)\underline{C} = 0 \quad (2.48a)$$

aus. Diese als Forderung an $\underline{X}(p)$ zu verstehende Beziehung reduziert sich bei Berücksichtigung von Gl.(2.9 b) auf

$$\underline{U}_1(p_2)\underline{C} = (p_2\underline{L}_1\underline{U}_1\underline{C}^T + \frac{1}{p_2\underline{C}_1}\underline{U}_C\underline{C}^T)\underline{C}. \quad (2.48b)$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\underline{u}_1 = \sqrt{L_1}\underline{u}_L, \quad \underline{u}_2 = \frac{\underline{u}_C}{\sqrt{p_2 p_2^* \underline{C}_1}}, \quad \underline{d} = \underline{U}_1(p_2)\underline{C} = \underline{d}_r + j\underline{d}_i, \quad (2.49)$$

so erhält man statt Gl.(2.48 b) die Bestimmungsgleichung für $\underline{u}_1$ und $\underline{u}_2$

$$\underline{d} = (p_2\underline{u}_1\underline{u}_1^T + p_2^*\underline{u}_2\underline{u}_2^T)\underline{C}. \quad (2.48c)$$

Eine wichtige Eigenschaft von $\underline{U}_1(p_2)$ und damit von $\underline{d}$ muß noch erwähnt werden. Voraussetzungsgemäß ist nämlich $\underline{Z}_1 = \underline{G}_1 + \underline{U}_1$ ebenso wie $\underline{Z}$ Impedanzmatrix. Aus diesem Grunde gilt für die quadratische Form

$$f_u = \underline{C}^{*T}\underline{U}_1(p_2)\underline{C} \quad (2.50a)$$

zufolge Satz 14 die Ungleichung

$$|\text{arc}\{\underline{C}^{*T}\underline{U}_1(p_2)\underline{C}\}| < |\text{arc } p_2|. \quad (2.50b)$$

Mit $\underline{d}$ nach Gl.(2.49) kann diese Ungleichung auch in der Form

$$|\text{arc}(\underline{C}^{*T}\underline{d})| < |\text{arc } p_2| \quad (2.50c)$$

geschrieben werden. Die Wahl von $\underline{X}$ als PRM bedingt, daß die Ungl.(2.50 c) auch dann befriedigt wird, falls man für $\underline{d}$ die rechte Seite der Gl.(2.48 c) einsetzt:

$$\underline{C}^{*T}\underline{d} = p_2(\underline{C}^{*T}\underline{u}_1\underline{u}_1^T\underline{C}) + p_2^*(\underline{C}^{*T}\underline{u}_2\underline{u}_2^T\underline{C}) \quad (2.50d)$$

Die eben ausgesprochene Behauptung bestätigt sich, wenn man berücksichtigt, daß die bei p_2 und p_2^* stehenden Faktoren positive Konstanten sind (Bild 17).

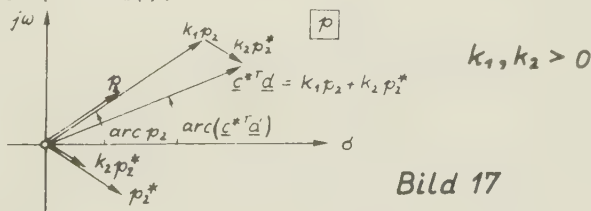


Bild 17

Die Aufgabe besteht nun in der Bestimmung der Vektoren $\underline{u}_1$ und $\underline{u}_2$. Die doppelte Anzahl von unbekannten Parametern ($2n$ statt n) und die komplexe Form der Bestimmungsgleichung (2.48 c) sind die Gründe dafür, daß sich die Lösung der Aufgabe schwieriger gestaltet als jene der entsprechenden Aufgabe in Abschnitt 11.2.3.1. Im folgenden wird gezeigt, daß es für $\underline{x}(p)$ immer zwei (in Sonderfällen eine) Lösungen in der Form von Gl.(2.46) gibt. Diese Lösungen werden hier numerisch bestimmt; es dürfte nämlich nicht leicht sein, die Vektoren $\underline{u}_1$ und $\underline{u}_2$ allgemein durch die gegebenen Vektoren $\underline{c}$, $\underline{d}$ und die komplexe Zahl p_2 auszudrücken.

Wie im letzten Abschnitt werden wir zur Lösung des Problems eine Kongruenztransformation mit der nichtsingulären Transformationsmatrix $\underline{T}$ auf die Bestimmungsgleichung (2.48 c) anwenden. Wir erhalten als transformierte Gleichung

$$\underline{T}^T \underline{d} = \underline{T}^T (p_2 \underline{u}_1 \underline{u}_1^T + p_2^* \underline{u}_2 \underline{u}_2^T) \underline{T} \underline{T}^{-T} \underline{c} . \quad (2.51)$$

Man muß nun innerhalb von Fall 2 zwei Möglichkeiten unterscheiden.

Fall 2a): Realteil und Imaginärteil von $\underline{d}$ sind linear abhängig, d.h. es gilt

$$\underline{d} = \alpha \underline{d}_r \quad (\alpha \text{ komplex, } \underline{d}_r \text{ reell}) .$$

In diesem Spezialfall läßt sich unser Ansatz vereinfachen, indem wir in Gl.(2.51)

$$\underline{u}_2 = h \underline{u}_1 \quad (h > 0) \quad (2.52)$$

setzen. Mit

$$\underline{u}_1 = \underline{E}_{n1} \underline{u}_{11} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{u}_{12}$$

sowie der entsprechenden Aufspaltung der übrigen Vektoren erhalten wir in anlehnung an die Überlegungen von Abschnitt 11.2.3.1.:

$$\underline{T}^T \underline{u}_1 = \underline{u}_{11} \underline{E}_{n1} \quad (2.53)$$

Mit dieser Forderung folgt aus der linken Seite von Gl.(2.51)

$$\underline{T}^T \underline{d} = \alpha \underline{E}_{n1} \underline{d}_{1r} ,$$

$$\underline{T} = \underline{I}_n - \frac{1}{\underline{d}_{1r}} \underline{E}_{n1} \underline{d}_{1r}^T \underline{F}_{n,n-1}^T . \quad (2.54)$$

Gl.(2.51) nimmt dann die einfache Form

$$\underline{I}^T \underline{d} = \alpha \underline{E}_{n1} \underline{d}_{1r} = u_{n1}^2 (p_2 + h p_2^*) \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T \underline{I}^{-1} \underline{c}$$

an. Ihre Linksmultiplikation mit $\underline{c}^{*T} (\underline{I}^{-1})^T$ ergibt

$$\underline{c}^{*T} \underline{d} = u_{n1}^2 (p_2 + h p_2^*) \{ \underline{c}^{*T} (\underline{I}^{-1})^T \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T \underline{I}^{-1} \underline{c} \} . \quad (2.55)$$

Wegen

$$\underline{c}^{*T} (\underline{I}^{-1})^T \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T \underline{I}^{-1} \underline{c} = |\underline{c}_{n1}|^2 > 0$$

erhält man aus Gl.(2.55) positive Lösungen für u_{11}^2 und $h^{(1)}$.

Schließlich findet man mit $\underline{T}$ nach Gl.(2.54) und u_{11} den Vektor $\underline{u}_1$ gemäß Gl.(2.53) zu

$$\underline{u}_1 = u_{n1} \left(\underline{E}_{n1} + \frac{1}{d_{1r}} \underline{F}_{n,n-1} \underline{d}_{2r} \right) \quad (2.56)$$

Damit ist die Lösung für $\underline{x}(p)$ praktisch bekannt. Mit $\underline{u}_2$ nach Gl.(2.52) findet man die Parameter I_1 , C_1 , $\underline{u}_1$ und $\underline{u}_c$ anhand der Beziehung (2.49). Eine weitere Lösung für $\underline{x}$ existiert in diesem Fall nicht.

Fall 2b): Realteil und Imaginärteil von $\underline{d}$ sind linear unabhängig. Der Lösungsansatz hat hier wieder die allgemeine Form, d.h. daß in Gl.(2.51) keine Einschränkungen gemacht werden. Die noch unbekannte Matrix $\underline{T}$, für die sich im folgenden die Form

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \underline{t}_{13}^T \\ t_{21} & t_{22} & \underline{t}_{23}^T \\ \underline{t}_{31} & \underline{t}_{32} & \underline{I}_{33} \end{bmatrix}^{n-1} \quad (2.57a)$$

als zweckmäßig erweist, soll die Forderungen

$$\underline{T}^T \underline{u}_1 = \underline{E}_{n1} = [1, 0, 0, \dots, 0]^T, \quad (2.58a)$$

$$\underline{T}^T \underline{u}_2 = \underline{G}_{n1} = [0, 1, 0, \dots, 0]^T \quad (2.58b)$$

erfüllen.²⁾ Sie führt somit Gl.(2.51) über in

$$\begin{aligned} \underline{I}^T \underline{d} &= (p_2 \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T + p_2^* \underline{G}_{n1} \underline{G}_{n1}^T) \underline{I}^{-1} \underline{c} \\ &= \left(p_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + p_2^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right) \underline{I}^{-1} \underline{c} . \quad (2.59) \end{aligned}$$

1) vgl. die Ausführungen zu den Beziehungen (2.50 a-d).

2) Der Vektor $\underline{G}_{n1}$ stellt wie $\underline{E}_{n1}$ eine Art Einheitsvektor dar.

Daraus folgt, daß in dem Vektor

$$\underline{T}^T \underline{d} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & \underline{t}_{31}^T \\ t_{12} & t_{22} & \underline{t}_{32}^T \\ \underline{t}_{13} & \underline{t}_{23} & \underline{I}_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{r1} + j d_{i1} \\ d_{r2} + j d_{i2} \\ \underline{d}_{r3} + j \underline{d}_{i3} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

die $n - 2$ letzten Komponenten verschwinden müssen. Diese Bedingung führt, wie aus Gl.(2.60) ersichtlich ist, auf die Bestimmungsgleichung für die Vektoren $\underline{t}_{13}$ und $\underline{t}_{23}$

$$\begin{bmatrix} \underline{t}_{13} & \underline{t}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{r1} + j d_{i1} \\ d_{r2} + j d_{i2} \end{bmatrix} = -\underline{I}_{33}^T [\underline{d}_{r3} + j \underline{d}_{i3}] .$$

(Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $\underline{I}_{33} = \underline{1}_{n-2}$ setzen und bekommt dann

$$\underline{t}_{13} = \frac{d_{r2} \underline{d}_{i3} - d_{i2} \underline{d}_{r3}}{d_{r1} d_{i2} - d_{r2} d_{i1}} , \underline{t}_{23} = \frac{d_{i1} \underline{d}_{r3} - d_{r1} \underline{d}_{i3}}{d_{r1} d_{i2} - d_{r2} d_{i1}} , \quad (2.61a)$$

Weiterhin kann

$$\underline{t}_{31} = 0 , \quad \underline{t}_{32} = 0 \quad (2.61b)$$

angenommen werden, da diese Vektoren überflüssige Freiheitsgrade repräsentieren.

Wir haben damit alle Elemente von $\underline{I}$ bis auf t_{11}, t_{12}, t_{21} und t_{22} bestimmt. Aus Gl.(2.57 a) gewinnt man mit den Gln.(2.61 a,b)

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \underline{t}_{13}^T \\ t_{21} & t_{22} & \underline{t}_{23}^T \\ 0 & 0 & \underline{1}_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 & \underline{I}_2 \\ 0 & \underline{1}_{n-2} \end{bmatrix} , \quad (2.57b)$$

und daraus

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}^{-1} &= \begin{bmatrix} \underline{I}_1^{-1} & -\underline{I}_1^{-1} \underline{I}_2 \\ 0 & \underline{1}_{n-2} \end{bmatrix} , \\ \underline{I}_1^{-1} &= \frac{1}{\det \underline{I}_1} \begin{bmatrix} t_{22} & -t_{12} \\ -t_{21} & t_{11} \end{bmatrix} , \\ -\underline{I}_1^{-1} \underline{I}_2 &= -\frac{1}{\det \underline{I}_1} \begin{bmatrix} t_{22} \underline{t}_{13}^T - t_{12} \underline{t}_{23}^T \\ -t_{21} \underline{t}_{13}^T + t_{11} \underline{t}_{23}^T \end{bmatrix} . \end{aligned} \right\} (2.57c)$$

Zur Bestimmung von $\underline{T}_1$ werten wir Gl.(2.59) aus:

$$\underline{T}^T \underline{d} = \begin{bmatrix} t_{11} d_{r1} + t_{12} d_{r2} + j(t_{11} d_{i1} + t_{12} d_{i2}) \\ t_{21} d_{r1} + t_{22} d_{r2} + j(t_{21} d_{i1} + t_{22} d_{i2}) \\ 0 \end{bmatrix}_{n-2},$$

$$\underline{T}^{-1} \underline{c} = \frac{1}{\det \underline{T}_1} \begin{bmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{22} \underline{t}_{13}^T + t_{12} \underline{t}_{23}^T \\ -t_{21} & t_{11} & t_{21} \underline{t}_{13}^T - t_{11} \underline{t}_{23}^T \\ 0 & 0 & (\det \underline{T}_1) 1_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{r1} + j c_{i1} \\ c_{r2} + j c_{i2} \\ c_{r3} + j c_{i3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \underline{T}_1} \begin{bmatrix} t_{22}(c_{r1} - \underline{t}_{13}^T c_{r3}) - t_{12}(c_{r2} - \underline{t}_{23}^T c_{r3}) + j \{ t_{22}(c_{i1} - \underline{t}_{13}^T c_{i3}) - t_{12}(c_{i2} - \underline{t}_{23}^T c_{i3}) \} \\ -t_{21}(c_{r1} - \underline{t}_{13}^T c_{r3}) + t_{11}(c_{r2} - \underline{t}_{23}^T c_{r3}) + j \{ -t_{21}(c_{i1} - \underline{t}_{13}^T c_{i3}) + t_{11}(c_{i2} - \underline{t}_{23}^T c_{i3}) \} \\ (\det \underline{T}_1) (c_{r3} + j c_{i3}) \end{bmatrix}.$$

Durch Einsetzen von $\underline{T}^T \underline{d}$ und $\underline{T}^{-1} \underline{c}$ in Gl.(2.59) erhält man zwei skalare komplexe Gleichungen, und, nach deren Trennung in Real- und Imaginärteil, vier reelle, nichtlineare Gleichungen mit den vier Unbekannten t_{1k} ($1, k = 1, 2$). Mit $\det \underline{T}_1 = 1/K$ und $p_2 = a + jb$ lauten diese Gleichungen wie folgt:

$$t_{11} d_{r1} + t_{12} d_{r2} = K \{ t_{22} (a(c_{r1} - \underline{t}_{13}^T c_{r3}) - b(c_{i1} - \underline{t}_{13}^T c_{i3})) + t_{12} (-a(c_{r2} - \underline{t}_{23}^T c_{r3}) + b(c_{i2} - \underline{t}_{23}^T c_{i3})) \},$$

$$t_{11} d_{i1} + t_{12} d_{i2} = K \{ t_{22} (a(c_{i1} - \underline{t}_{13}^T c_{i3}) + b(c_{r1} - \underline{t}_{13}^T c_{r3})) + t_{12} (-a(c_{i2} - \underline{t}_{23}^T c_{i3}) - b(c_{r2} - \underline{t}_{23}^T c_{r3})) \},$$

$$t_{21} d_{r1} + t_{22} d_{r2} = K \{ t_{21} (-a(c_{r1} - \underline{t}_{13}^T c_{r3}) - b(c_{i1} - \underline{t}_{13}^T c_{i3})) + t_{11} (a(c_{r1} - \underline{t}_{13}^T c_{r3}) + b(c_{i2} - \underline{t}_{23}^T c_{i3})) \},$$

$$t_{21} d_{i1} + t_{22} d_{i2} = K \{ t_{21} (-a(c_{i1} - \underline{t}_{13}^T c_{i3}) + b(c_{r1} - \underline{t}_{13}^T c_{r3})) + t_{11} (a(c_{i2} - \underline{t}_{23}^T c_{i3}) - b(c_{r2} - \underline{t}_{23}^T c_{r3})) \}.$$

Diese spezielle Form eines nichtlinearen Gleichungssystems in den Unbekannten t_{1k} - K ist ja über die Beziehung $K^{-1} = t_{11} t_{22} - t_{12} t_{21}$ ebenfalls von den t_{1k} abhängig - ermöglicht eine Darstellungsweise, wie sie bei linearen Gleichungssystemen üblich ist, und die sich auch hier als zweckmäßig erweist:

t_{11}	t_{21}	t_{12}	t_{22}	=
d_{r1}	d_{r1}	$K\{a(c_{r1}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{r3}) -$ $-b(c_{12}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{13})\}$	$K\{-a(c_{r1}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{r3}) +$ $+b(c_{11}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{13})\}$	0
d_{i1}	d_{i1}	$K\{a(c_{12}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{13}) +$ $+b(c_{r2}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{r3})\}$	$K\{-a(c_{11}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{13}) -$ $-b(c_{r1}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{r3})\}$	0
$K\{a(c_{r1}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{r3}) +$ $+b(c_{12}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{13})\}$	$K\{-a(c_{r1}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{r3}) -$ $-b(c_{11}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{13})\}$	$-d_{r1}$	$-d_{r1}$	0
$K\{a(c_{12}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{13}) -$ $-b(c_{r2}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{r3})\}$	$K\{-a(c_{11}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{13}) +$ $+b(c_{r1}-\underline{t}_{13}^T \underline{c}_{r3})\}$	$-d_{i1}$	$-d_{i1}$	0

(2.62)

Es erhebt sich nun die Frage, ob überhaupt Lösungen für die t_{1k} existieren und welcher Art sie sind. Wir erinnern uns, daß die bisher bestimmten Elemente von $\underline{T}$, nämlich $\underline{t}_{13}$ und $\underline{t}_{23}$, reell sind. Weiter hatten wir festgestellt, daß durch die spezielle Wahl von $\underline{x}(p)$ die Ungl.(2.50 c) befriedigt wurde. Daran ändert auch die Kongruenztransformation nichts, solange die Transformationsmatrix reell ist. Bei Linksmultiplikation von Gl.(2.59) mit $\underline{c}^*T(\underline{T}^{-1})^T$ erhält man nämlich

$$\begin{aligned} \underline{c}^{*T} \underline{d} &= \underline{c}^{*T} (\underline{I}^{-1})^T (p_1 \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T + p_2^* \underline{G}_{n1} \underline{G}_{n1}^T) \underline{I}^{-1} \underline{c} \\ &= \underline{c}^{*T} \begin{bmatrix} (\underline{I}_1^{-1})^T \\ -\underline{I}_2^T (\underline{I}_1^{-1})^T \end{bmatrix} (p_1 \underline{E}_{21} \underline{E}_{21}^T + p_2^* \underline{G}_{21} \underline{G}_{21}^T) \begin{bmatrix} \underline{I}_1^{-1} & \overset{n-1}{-\underline{I}_1^{-1} \underline{I}_2} \end{bmatrix} \underline{c}. \end{aligned}$$

Nur wenn $\underline{T}_1$ rein reell ist, erfüllt die rechte Seite dieser Beziehung das genannte Kriterium der Ungl.(2.50 c). Daraus kann man schließen, daß die Lösung für $\underline{T}_1$, wenn sie existiert, rein reell ist. Die Frage nach ihrer Existenz läßt sich anhand des Gleichungssystems (2.62) beantworten.

Geht man von der Fiktion aus, daß es sich bei diesem um ein lineares, homogenes Gleichungssystem in den vier t_{1k} handelt, so erhält man für diese Unbekannten nur dann nichttriviale Lösungen, falls die Koeffizientendeterminante des Systems, die ein Polynom $P(K)$ vierten Grades in K darstellt, verschwindet. Für die t_{1k} ergibt sich dann aus dem System scheinbar eine einparametrische Lösungsschar. Dieser Freiheitsgrad geht jedoch durch

die Forderung $P(K) = 0$ verloren, die den t_{ik} eine weitere Bindung auferlegt.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt die Gleichung $P(K) = 0$ vier Lösungen K_1 . Zu jedem der K_1 existiert andererseits über das Gleichungssystem (2.62) je ein Lösungsquadrupel für die t_{ik} , die teilweise untereinander gleich sein können. Nach der obigen Aussage über $\underline{T}_1$ müssen diese vier Lösungsquadrupel der t_{ik} notwendig reell sein, woraus mit $K = 1/(\det \underline{T}_1)$ hervorgeht, daß auch die vier K_1 notwendig reell sein müssen.

Einen weiteren Beweis dafür, daß die Wurzeln von $P(K) = 0$ sämtlich reell sind, liefern wir auf den folgenden Seiten. Aus dem Gleichungssystem (2.62) ist dann sofort erkenntlich, daß reelle Werte für K notwendig reelle Lösungen t_{ik} zur Folge haben.

Die - im Hinblick auf die Untersuchung seiner Wurzeln - günstigste Form von $P(K)$ gewinnt man durch die zweireihige Laplaceentwicklung der Koeffizientendeterminante von Gl.(2.62), z.B. nach den Spalten 1 und 2 [15]. Das Polynom enthält - wie man aus Gl.(2.62) direkt ersieht - nur gerade Potenzen in K , und hat mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} C_{r1} - \underline{t}_{13}^T C_{r3} &= V_1, & C_{i1} - \underline{t}_{13}^T C_{i3} &= W_1, \\ C_{r2} - \underline{t}_{23}^T C_{r3} &= V_2, & C_{i2} - \underline{t}_{23}^T C_{i3} &= W_2 \end{aligned} \right\} (2.63a)$$

die Gestalt¹⁾

$$\begin{aligned} P(K) &= K^4 \begin{vmatrix} av_2 + bw_2 & -av_1 - bw_1 \\ aw_2 - bv_2 & -aw_1 + bv_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} av_2 - bw_2 & -av_1 + bw_1 \\ aw_2 + bv_2 & -aw_1 - bv_1 \end{vmatrix} \\ &+ K^2 \left(- \begin{vmatrix} dr_1 & dr_2 \\ av_2 & -av_1 \\ +bw_2 & -bw_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} aw_2 & -aw_1 \\ +bw_2 & -bv_1 \\ -di_1 & -di_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dr_1 & dr_2 \\ aw_2 & -av_1 \\ -bv_2 & -bw_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} aw_2 & -aw_1 \\ +bv_2 & -bv_1 \\ -dr_1 & -dr_2 \end{vmatrix} \right. \\ &+ \begin{vmatrix} di_1 & di_2 \\ av_2 & -av_1 \\ +bw_2 & -bw_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} av_2 & -av_1 \\ -bw_2 & +bw_1 \\ -di_1 & -di_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} di_1 & di_2 \\ aw_2 & -aw_1 \\ -bv_2 & +bv_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} av_2 & -av_1 \\ -bw_2 & +bw_1 \\ -dr_1 & -dr_2 \end{vmatrix} \left. \right) \\ &+ \frac{\begin{vmatrix} dr_1 & dr_2 \\ di_1 & di_2 \end{vmatrix}^2}{di_1 di_2} \end{aligned} \quad (2.64a)$$

1) Die senkrechten Begrenzungsstriche bedeuten hier das Determinantensymbol.

Wie in Gl.(2.6) a) eingeführten Abkürzungen lassen sich mit den Ausdrücken für $\underline{t}_{13}$ und $\underline{t}_{23}$ nach Gl.(2.61 a) ausschließlich durch die Elemente von $\underline{c}$ und $\underline{d}$ darstellen:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{(d_{12} \underline{d}_r^T - d_{r2} \underline{d}_i^T) \underline{c}_r}{d_{12} d_{r1} - d_{r2} d_{i1}}, & w_1 &= \frac{(d_{12} \underline{d}_r^T - d_{r2} \underline{d}_i^T) \underline{c}_i}{d_{12} d_{r1} - d_{r2} d_{i1}}, \\ v_2 &= \frac{(d_{r1} \underline{d}_i^T - d_{i1} \underline{d}_r^T) \underline{c}_r}{d_{r1} d_{12} - d_{i1} d_{r2}}, & w_2 &= \frac{(d_{r1} \underline{d}_i^T - d_{i1} \underline{d}_r^T) \underline{c}_i}{d_{r1} d_{12} - d_{i1} d_{r2}} \end{aligned} \right\} (2.63b)$$

Setzt man diese durch gegebene Parameter ausgedrückten Abkürzungen v_1, w_1, v_2, w_2 in Gl.(2.64 a) ein, so gelangt man nach einer ziemlich umfangreichen algebraischen Umformung zur folgenden Gleichung für $P(K)$:

$$\begin{aligned} P(K) &= K^4 (a^2 + b^2)^2 \left(\frac{\underline{d}_r^T \underline{c}_r \underline{d}_i^T \underline{c}_i - \underline{d}_r^T \underline{c}_i \underline{d}_i^T \underline{c}_r}{d_{r1} d_{12} - d_{i1} d_{r2}} \right)^2 + \\ &+ K^2 \{ \underline{d}_i^T (a \underline{c}_i + b \underline{c}_r) \underline{d}_r^T (a \underline{c}_i - b \underline{c}_r) + \underline{d}_i^T (a \underline{c}_r + b \underline{c}_i) \underline{d}_i^T (a \underline{c}_r - b \underline{c}_i) - \\ &- \underline{d}_r^T (a \underline{c}_r + b \underline{c}_i) \underline{d}_i^T (a \underline{c}_i + b \underline{c}_r) - \underline{d}_i^T (a \underline{c}_i - b \underline{c}_r) \underline{d}_r^T (a \underline{c}_r - b \underline{c}_i) \} + \\ &+ (d_{r1} d_{12} - d_{i1} d_{r2})^2 \end{aligned} \quad (2.64 b)$$

Bezeichnet man den zur Potenz K^4 gehörigen Faktor mit α_4 , und die entsprechenden Faktoren von K^2 und K^0 mit α_2 und α_0 , so lassen sich α_4 und α_2 in eine für unser Vorhaben noch günstigere Form bringen. Für α_2 gilt zunächst

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= a^2 \{ (\underline{d}_r^T \underline{c}_i)^2 - 2 \underline{d}_r^T \underline{c}_r \underline{d}_i^T \underline{c}_i + (\underline{d}_i^T \underline{c}_r)^2 \} - \\ &- b^2 \{ (\underline{d}_r^T \underline{c}_r)^2 + 2 \underline{d}_r^T \underline{c}_i \underline{d}_i^T \underline{c}_r + (\underline{d}_i^T \underline{c}_i)^2 \} \\ &= \frac{a^4 - b^4}{2} \{ (\underline{d}_r^T \underline{c}_r - \underline{d}_i^T \underline{c}_i)^2 + (\underline{d}_r^T \underline{c}_i + \underline{d}_i^T \underline{c}_r)^2 \} - \frac{a^2 + b^2}{2} \{ (\underline{d}_r^T \underline{c}_r + \underline{d}_i^T \underline{c}_i)^2 - (\underline{d}_r^T \underline{c}_i - \underline{d}_i^T \underline{c}_r)^2 \}. \end{aligned}$$

Setzt man noch die Beziehungen

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{2} (p_2^2 + p_2^{*2}), \quad a^2 + b^2 = p_2 p_2^*,$$

$$(\underline{d}_r^T \underline{c}_r - \underline{d}_i^T \underline{c}_i)^2 + (\underline{d}_r^T \underline{c}_i + \underline{d}_i^T \underline{c}_r)^2 = \underline{d}_r^T \underline{c}_r \underline{d}^{*T} \underline{c}_r^*,$$

$$(\underline{d}_r^T \underline{c}_r + \underline{d}_i^T \underline{c}_i)^2 - (\underline{d}_r^T \underline{c}_i - \underline{d}_i^T \underline{c}_r)^2 = \frac{1}{2} \{ (\underline{d}^{*T} \underline{c}_r)^2 + (\underline{d}^T \underline{c}_r^*)^2 \},$$

$$\underline{d}_r^T \underline{c}_r \underline{d}_i^T \underline{c}_i - \underline{d}_r^T \underline{c}_i \underline{d}_i^T \underline{c}_r = \frac{1}{4} (\underline{d}^{*T} \underline{c}_r \underline{d}^T \underline{c}_r^* - \underline{d}_r^T \underline{c}_r \underline{d}^{*T} \underline{c}_r^*)$$

in α_2 bzw. α_4 ein, so erhält man

$$\alpha_0 = (d_{r1}d_{i2} - d_{i1}d_{r2})^2 > 0 \text{ unverändert,}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4}(p_1^2 + p_2^2) \underline{d}^T \underline{d}^* \underline{c}^* \underline{c} - \frac{1}{4} p_1 p_2^* \{(\underline{d}^* \underline{c})^T + (\underline{c}^T \underline{c}^*)^T\}, \quad (2.65)$$

$$\alpha_4 = \left(\frac{1}{4} p_1 p_2^* \frac{\underline{d}^{*T} \underline{d}^T \underline{c}^* \underline{c} - \underline{d}^T \underline{c} \underline{d}^* \underline{c}^*}{d_{r1}d_{i2} - d_{i1}d_{r2}} \right)^2 > 0.$$

Wir setzen $M = K^2$ sowie $P(K) = P_M(K^2) = P_M(K)$ und finden als Wurzeln der Gleichung $P_M(K) = 0$

$$M_{1/2} = \frac{-\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_0\alpha_4}}{2\alpha_4}.$$

Zunächst wird die Diskriminante

$$D_\alpha = \alpha_2^2 - 4\alpha_0\alpha_4$$

berechnet. Da α_0 und α_4 vollständige Quadrate sind (vgl. Gl. (2.65)), c.h.

$$\alpha_0 = q_1^2, \quad \alpha_4 = q_2^2,$$

läßt sich D_α nach der Formel

$$D_\alpha = (\alpha_2 + 2q_1q_2)(\alpha_2 - 2q_1q_2)$$

berechnen, die mit Gl. (2.65) wie folgt ausgewertet wird:

$$D_\alpha = \{ (p_1 + p_2^*)^2 \underline{d}^T \underline{d}^* \underline{c}^* \underline{c} - p_1 p_2^* (\underline{d}^* \underline{c})^T + \underline{d}^T \underline{c}^* \underline{c}^* \} \cdot \\ \times \{ (p_1 - p_2^*)^2 \underline{d}^T \underline{d}^* \underline{c}^* \underline{c} - p_1 p_2^* (\underline{d}^* \underline{c})^T + \underline{d}^T \underline{c}^* \underline{c}^* \}.$$

Soll wenigstens eines der K reell werden, so muß D_α natürlich positiv sein. Dies läßt sich jedoch an der obigen Form nicht ohne weiteres beurteilen. Wir ziehen deshalb zu einer weiteren Umformung von D_α die Bestimmungsgleichung (2.48 c) heran und schreiben

$$\left. \begin{aligned} \underline{d}^T \underline{c} &= \underline{c}^T (p_1 \underline{u} \underline{u}_1^T + p_2^* \underline{u}_1 \underline{u}_1^T) \underline{c} = p_1 (\underline{c}^T \underline{u}_1)^T (\underline{c}^T \underline{u}_1) \\ \underline{d}^* \underline{c}^* &= \dots = p_2^* (\underline{c}^* \underline{u}_1)^T + p_1 (\underline{c}^* \underline{u}_2)^T, \\ \underline{d}^T \underline{c}^* &= \dots = p_1 (\underline{c}^T \underline{u}_1) (\underline{c}^* \underline{u}_1) + p_2^* (\underline{c}^T \underline{u}_1) (\underline{c}^* \underline{u}_2), \\ \underline{d}^* \underline{c} &= \dots = p_2^* (\underline{c}^T \underline{u}_1) (\underline{c}^* \underline{u}_1) + p_1 (\underline{c}^T \underline{u}_1) (\underline{c}^* \underline{u}_2). \end{aligned} \right\} (2.66)$$

Setzen wir diese Ausdrücke unter Verwendung der Abkürzungen

$$x_1 = \underline{c}^T \underline{u}_1, \quad x_2 = \underline{c}^T \underline{u}_2 \quad (x_1, x_2 \text{ komplex})$$

in D_α ein, so bekommen wir

$$D_{\alpha} = (p_1 + p_1^*)(p_1 - p_1^*)(p_1 j_1 j_1^* + p_1^* j_1^* j_1^*)(p_1 j_1 j_1^* - p_1^* j_1^* j_1^*)^2.$$

D_{α} ist offensichtlich positiv. Wir formen auch $-\alpha_2$ mit Hilfe von Gl.(2.66) um:

$$-\alpha_2 = -(p_1 p_1^*)(j_1 j_1^* - j_1^* j_1^*)^2 - (p_1^2 j_1 j_1^* - p_1^* j_1^* j_1^*)^2$$

Man überzeugt sich leicht, daß $-\alpha_2 > 0$ gilt. Mit D_{α} und α_2 erhält man schließlich

$$-\alpha_2 \pm \sqrt{D_{\alpha}} = -\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_0\alpha_4}$$

$$= \begin{cases} -2(p_1^2 j_1 j_1^* - p_1^* j_1^* j_1^*)^2 > 0 \\ -2(p_1 p_1^*)(j_1 j_1^* - j_1^* j_1^*)^2 > 0 \end{cases}$$

Da auch α_4 nach Gl.(2.65) positiv ist, sind die Wurzeln $M_{1/2}$ von $P_M(M) = 0$ ebenfalls positiv, und somit läßt sich die vorher aufgestellte Behauptung, daß die Wurzeln von $P(K) = 0$ sämtlich reell sind, wie folgt bestätigen:

$$K_{1/2} = \pm \sqrt{M_1} \quad (\text{reell}),$$

$$K_{3/4} = \pm \sqrt{M_2} \quad (\text{reell}).$$

Damit ist die Existenzfrage von Lösungen für $\underline{T}_1$ auf eine weitere Art positiv beantwortet. Die Berechnung von $\underline{T}_1$ ist aus drei beliebigen Gleichungen des Systems (2.62) unter Berücksichtigung der Determinantenbedingung möglich. Die Ergebnisse für ein bestimmtes K haben die typische Form

$$t_{11} = K t_{22} \beta_{11}(K^2), \quad t_{21} = K t_{22} \beta_{21}(K^2), \quad t_{12} = t_{22} \beta_{12}(K^2),$$

$$t_{22}^2 = \frac{1}{K^2} \beta(K^2) \quad (\text{notwendig positiv}). \quad (2.67)$$

Die gesuchten Vektoren $\underline{u}_1$ und $\underline{u}_2$, die $\underline{x}(p)$ bestimmen, erhalten wir aus den Gln.(2.58 a,b) zu

$$\underline{u}_1 = (\underline{I}^T)^{-1} \underline{E}_{11} = \frac{1}{\det \underline{I}_1} \begin{bmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{22} t_{13}^T + t_{11} t_{23}^T \end{bmatrix}^T, \quad (2.68a)$$

$$\underline{u}_2 = (\underline{I}^T)^{-1} \underline{G}_{11} = \frac{1}{\det \underline{I}_1} \begin{bmatrix} -t_{21} & t_{11} & t_{21} t_{13}^T - t_{11} t_{23}^T \end{bmatrix}^T. \quad (2.68b)$$

Für Berechnung der für die Realisierung wichtigen Größen L_1, C_1 sowie der Vektoren $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ sei auf die Gl.(2.49) verwiesen.

Es gibt nun für $\underline{T}_1$ und damit für das Vektorpaar $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ vier

- nur dem Vorzeichen nach - verschiedene Lösungen, bedingt durch je zwei mögliche Vorzeichen bei k und $t_{22}(1)$. Bildet man aber die beiden für die Realisierung allein interessierenden dyadischen Produkte $\underline{u}_1 \underline{u}_1^T$ und $\underline{u}_2 \underline{u}_2^T$, so fällt bei ihnen diese Vieldeutigkeit weg. Es gibt damit für $k = \pm k_1$ ($k_2 = -k_1$) und für $k = \pm k_3$ ($k_4 = -k_3$) je ein Lyadenpaar $\underline{u}_1 \underline{u}_1^T$, $\underline{u}_2 \underline{u}_2^T$ als Lösung.

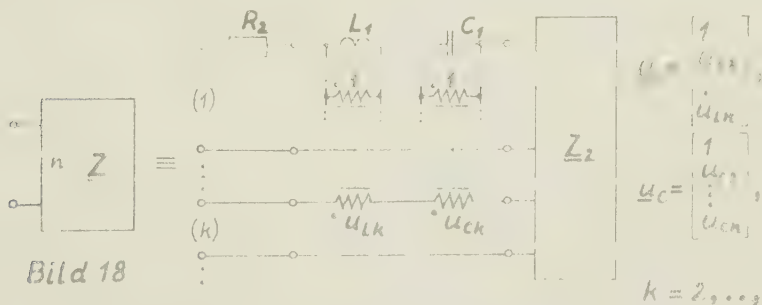
Wir kehren zurück zu der durch Gl.(2.47) erklärten Matrix $\underline{Z}_2$. Für die weitere Beschreibung des Entwicklungszyklus wollen wir uns auf den allgemeinen und weiter vorne charakterisierten Fall 2b) beschränken. Daraus gewinnt man die Ergebnisse für Fall 2a) als Sonderfall.

Die Subtraktion einer der beiden soeben berechneten Matrizen $\underline{X}(p)$ von $\underline{Z}_1$ bewirkt die beabsichtigte Singularität von $\underline{Z}_2$ bei p_2 , zum andern eine Graderhöhung um zwei gegenüber $\underline{Z}_1$. Gemäß den Überlegungen von Teil I besitzt $\underline{Z}_2$ außer bei p_2 auch an den Stellen p_2^* , $-p_2$ und $-p_2^*$ je eine Nullstelle. Anders ausgedrückt gilt Gl.(2.48 a), angewandt auf die vier genannten p -Werte, wobei für die Argumente $p = \pm p_2^*$ in Gl.(2.48 a) $\underline{c}^*$ statt $\underline{c}$ zu setzen ist.

Nach zwei Entwicklungsschritten läßt sich $\underline{Z}$ durch die Summe

$$\underline{Z}(p) = R_2 E_m E_m^T + R_1 \underline{u}_1 \underline{u}_1^T + \frac{1}{pC_1} \underline{u}_C \underline{u}_C^T + \underline{Z}_2(p) \quad (2.69)$$

darstellen, wobei R_2 , L_1 , C_1 positive Konstanten und $\underline{u}_1$, $\underline{u}_C$ reelle n -Vektoren sind. Bild 18 zeigt die der Gl.(2.69) entsprechende Schaltung für $\underline{Z}$.



Für die Fortsetzung des Entwicklungszyklus sind die durch die Subtraktion von $\underline{X}(1)$ hervorgerufenen Eigenschaften von $\underline{Z}_2(p)$ von Bedeutung. Nach dem Satz von Cauchy bzw. einer seiner Äqui-

tigen Folgerungen [7,18] hat $\underline{Z}_2$, das gemäß Gl.(2.47) definiert ist, in der offenen rechten p -Halbebene höchstens zwei Nullstellen; diese liegen in unserem Fall bei p_2 und p_2^* . Auf der imaginären Achse besitzt $\underline{Z}_2$ voraussetzungsgemäß keine Nullstellen (auch $\underline{Z}_1$ besaß dort keine), aber je einen Pol bei $p = 0$ und $p = \infty$ mit jeweils nsd Residuum. Diese Eigenschaften von $\underline{Z}_2$ lassen sich leicht verifizieren, wenn man die zugeordnete quadratische Form $f_Z(p)$ bildet. Auf diese skalare Funktion läßt sich der oben zitierte Satz unmittelbar anwenden; die Konsequenzen, die sich dadurch für $f_Z(p)$ ergeben, lassen sich wiederum auf $\underline{Z}_2$ übertragen und führen zu den obigen, über diese Matrix gemachten Aussagen.

Die Inverse von $\underline{Z}_2$, $\underline{Y}_2$, kann in fünf Summanden zerlegt werden, von denen vier die Polteile der Pole bei p_2 , p_2^* , $-p_2$ und $-p_2^*$, der fünfte die an diesen Stellen polfreie Restmatrix darstellt.

$$\underline{Z}_2^{-1} = \underline{Y}_2 = \frac{\underline{P}_{p_2}}{p - p_2} + \frac{(\underline{P}_{p_2})^*}{p - p_2^*} + \frac{\underline{P}_{(-p_2)}}{p + p_2} + \frac{(\underline{P}_{(-p_2)})^*}{p + p_2^*} + \underline{Y}_3 \quad (2.70)$$

$\underline{Y}_3$ besitzt bei $p = 0, \infty$ je eine einfache Nullstelle vom Rang 1. Ganz entsprechend zu Satz 9 sind die Polresiduen bei p_2 und p_2^* bzw. bei $-p_2$ und $-p_2^*$ zueinander konjugiert. Zur Realisierung der Polteile ist jedoch deren explizite Berechnung erforderlich. Wählen wir als erste Stelle p_2 aus, so gilt zunächst

$$\underline{P}_{p_2} = (p - p_2) \underline{Z}_2^{-1}(p) \big|_{p=p_2} \quad (2.71)$$

Die weiteren Überlegungen laufen im wesentlichen parallel zu denen, die im letzten Abschnitt bei der Bestimmung von $\underline{P}_0$ - in dem so bezeichneten 1. Verfahren - angestellt wurden. So erhält man aus Gl.(2.71)

$$\underline{P}_{p_2} = (p - p_2) \frac{\underline{Z}_2(p)_{adj}}{\det \underline{Z}_2(p)} \big|_{p=p_2} \quad .$$

Wegen Gl.(2.48 a) lautet die Taylor-Entwicklung von $\det \underline{Z}_2(p)$ in der Umgebung von p_2

$$\det \underline{Z}_2(p) = (p - p_2) \{ \det \underline{Z}_2(p) \}' \big|_{p=p_2} + \dots ,$$

womit sich für $\underline{P}_{p_2}$ ergibt

$$\underline{P}_{p_2} = \frac{\underline{Z}_2(p)_{adj}}{\{\det \underline{Z}_2(p)\}^r} \Big|_{p=p_2} = \frac{\underline{Z}_2(p_2)_{adj}}{\{\det \underline{Z}_2(p)\}' \Big|_{p=p_2}} . \quad (2.72)$$

Zur Abkürzung schreiben wir

$$\underline{Z}_2(p_2)_{adj} = \underline{\xi} = [\xi_{ik}] \quad (i, k = 1, \dots, n) . \quad (2.73a)$$

Es läßt sich zeigen, daß für $\underline{\xi}$ speziell

$$\underline{\xi} = K_{\xi} \underline{c} \underline{c}^T \quad (2.73b)$$

gilt, wobei K_{ξ} eine i.a. komplexe Konstante und $\underline{c}$ den Vektor aus Gl.(2.9 b) bedeuten. Zu diesem Ergebnis kommt man, wenn man einerseits Gl.(2.48 a), andererseits den allgemein gültigen und speziell auf $\underline{A} = \underline{Z}_2(p_2)$ angewandten Zusammenhang [15]

$$\underline{A} \underline{A}_{adj} = \underline{1}_n \det \underline{A}$$

betrachtet. Ein Vergleich beider Beziehungen führt - der Argumentation von Cederbaum [16] folgend - zwangsläufig zu Gl.

(2.73 b).

Für den Nennerausdruck von Gl.(2.72) erhält man mit $\underline{z}_2 = [\underline{z}_{ik}]$ - wiederum analog zu den früheren Betrachtungen -

$$\{\det \underline{Z}_2(p)\}' \Big|_{p=p_2} = \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{d \underline{z}_{ik}}{dp} \Big|_{p=p_2} \right) \xi_{ik} ,$$

oder mit Gl.(2.73 b)

$$\{\det \underline{Z}_2(p)\}' \Big|_{p=p_2} = K_{\xi} \underline{c}^T \frac{d \underline{Z}_2(p)}{dp} \Big|_{p=p_2} \underline{c} . \quad (2.74a)$$

Der gerade Teil von $\underline{Z}_2$ ist gleich $\underline{G}_1$. Wegen Gl.(2.10 b) verschwindet infolgedessen der ungerade Teil in Gl.(2.74 a):

$$\{\det \underline{Z}_2(p)\}' \Big|_{p=p_2} = K_{\xi} \underline{c}^T \frac{d \underline{U}_2(p)}{dp} \Big|_{p=p_2} \underline{c} \quad (2.74b)$$

Dabei bedeutet $\underline{U}_2(p)$ den ungeraden Teil von $\underline{Z}_2$. Über den Wert des Ausdrucks in Gl.(2.74 b) kann - abweichend zum letzten Abschnitt - nicht ohne weiteres etwas ausgesagt werden. Diese Unbestimmtheit kann jedoch an späterer Stelle aufgrund funktionentheoretischer Überlegungen beseitigt werden. Für das Polresiduum $\underline{P}_{p_2}$ gewinnt man aus Gl.(2.72) mit den Gln.(2.73 b), (2.74) den Ausdruck

$$\underline{P}_{p_2} = \frac{\underline{c} \underline{c}^T}{\left(\underline{c}^T \frac{d \underline{U}_2}{dp} \underline{c} \right) \Big|_{p=p_2}} . \quad (2.75)$$

Für $p = -p_2$ erhalten wir mit der einen Ausnahme, daß der Nenner jetzt an der Stelle $p = -p_2$ zu nehmen ist, formal dasselbe Ergebnis. Da aber $\underline{c}^T (d\underline{u}_2/dp) \underline{c}$ als Ableitung einer ungeraden Funktion selbst wieder gerade ist, stimmen $\underline{P}(-p_2)$ und $\underline{P}_{p_2}$ tatsächlich völlig überein. Es ist damit

$$\underline{P}_{(-p_2)} = \underline{P}_{p_2} \quad .$$

Schreibt man für $\underline{P}_{p_2}$ statt Gl.(2.75) alternativ

$$\underline{P}_{p_2} = \frac{\underline{u}_q \underline{u}_q^T}{2L} ; \quad \underline{u}_q = -\frac{\underline{c}}{c_1} , \quad 2L = c_1^2 \left\{ \underline{c}^T \frac{d\underline{u}_2}{dp} \Big|_{p=p_2} \underline{c} \right\} ,$$

und faßt man die vier Polteile zusammen zu einer "Leitwertmatrix" $\underline{Y}$, so erhält Gl.(2.70) die Form

$$\underline{Y}_2 = \underline{Y}_q + \underline{Y}_3 \quad , \quad (2.76a)$$

wobei

$$\underline{Y}_q = \frac{1}{L} \frac{p}{p^2 - p_2^2} \underline{u}_q \underline{u}_q^T + \frac{1}{L^*} \frac{p}{p^2 - p_2^2} \underline{u}_q^* \underline{u}_q^{*T} \quad . \quad (2.76b)$$

$\underline{Y}_q$ ist trotz der komplexen Parameter L , p_2 , $\underline{u}_q$ eine reelle, wenn auch nicht positive Matrix. Auf die letztgenannte Eigenschaft von $\underline{Y}_q$ und deren Konsequenzen soll noch kurz eingegangen werden.

Durch die Polabspaltung nach Gl.(2.70) wurde $\underline{Y}_2$ in zwei Teile zerlegt, von denen der eine, nämlich $\underline{Y}_3$, einen um vier gerin-
geren Grad als $\underline{Y}_2$ und außerdem in der rechten p -Halbebene keinen Pol mehr aufweist. $\underline{Y}_3$ wird lediglich bei $p = 0$ und $p = \infty$ singular. Die $\underline{Y}_3$ der früheren Betrachtungen der Eigenschaften von $\underline{Y}_2$ ist nun außerdem noch, daß der Realteil von $\underline{Y}_3$ überall auf der imaginären Achse pd ist. Der Beweis für diese Behauptung läßt sich einfach erbringen. Voraussetzungsgemäß ist $\operatorname{Re} \underline{Z}_1(j\omega) = \operatorname{Re} \underline{Z}_2(j\omega) = \underline{R}_2(\omega)$ pd ¹⁾. Nun werden die Bezeichnungen

$$\underline{Z}_2(j\omega) = \operatorname{Re} \underline{Z}_2(j\omega) + j \operatorname{Im} \underline{Z}_2(j\omega) = \underline{G}_2(\omega) + j \underline{V}_2(\omega) \quad ,$$

$$\underline{Z}_1^*(j\omega) = \underline{Z}_2^*(j\omega) = \underline{Y}_1^*(j\omega) + j \operatorname{Im} \underline{Y}_1^*(j\omega) = \underline{G}_1(\omega) + j \underline{V}_1(\omega)$$

vereinbart. Der Zusammenhang zwischen $\underline{Z}_2$ und $\underline{Y}_2$:

1) Mit etwas größerem Aufwand läßt sich die Behauptung auch ohne die Einschränkung in Fußnote 3.66 zeigen.

$$\underline{Y}_1 \underline{Z}_1 = \underline{1}_n ,$$

liefert die zwei - für alle ω gültigen - reellen Beziehungen

$$\underline{G}_2 \underline{R}_2 - \underline{V}_2 \underline{X}_2 = \underline{1}_n , \quad (2.77a)$$

$$\underline{G}_2 \underline{X}_2 + \underline{V}_2 \underline{R}_2 = 0 . \quad (2.77b)$$

Mit

$$\underline{V}_2 = -\underline{G}_2 \underline{X}_2 \underline{R}_2^{-1}$$

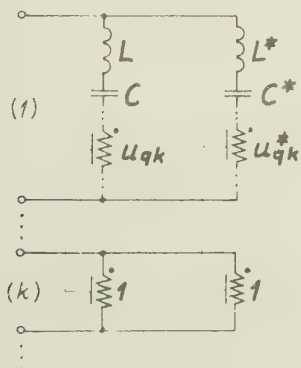
aus Gl.(2.77 b) geht man ein in Gl.(2.77 a) und bekommt

$$\underline{G}_2 (\underline{R}_2 + \underline{X}_2 \underline{R}_2^{-1} \underline{X}_2) = \underline{1}_n . \quad (2.78)$$

Mit $\underline{R}_2$ ist auch der Klammerausdruck in Gl.(2.78) wieder pd, sodaß auch $\underline{G}_2(\omega) = \text{Re } \underline{Y}_2(j\omega)$ und mit ihnen $\text{Re } \underline{Y}_3(j\omega)$ diese Eigenschaft besitzen, denn wegen der Gln.(2.76 a,b) beeinflusst das in p ungerade $\underline{Y}_q$ den Realteil von $\underline{Y}_2$ auf der imaginären Achse nicht.

Aus den obigen Ausführungen folgt für die Matrix $\underline{Y}_q$, daß sie notwendig nichtpositiv (d.h. nicht PRM) ist, und für ihre Schaltung, daß sie nicht realisierbar ist. Diese Schaltung enthält nämlich negative Elemente, wie später gezeigt werden wird. Dagegen ist die Restmatrix $\underline{Y}_3$ sehr wohl positiv reell, denn sie erfüllt, wie oben gezeigt wurde, alle Bedingungen von Satz 6.

Um zu einer Schaltung für $\underline{Y}_q$ zu gelangen, betrachten wir die Gl. (2.76 b). Dieser Gleichung kann rein formal die Schaltung in Bild 19 mit komplexwertigen Elementen zugeordnet werden.



$$\underline{u}_q = [-1, u_{q2}, \dots, u_{qn}]^T,$$

$$C = -\frac{1}{p_2^2 L} ,$$

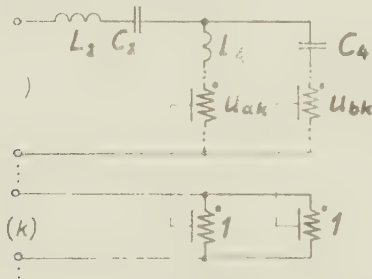
$$k = 2, \dots, n .$$

Bild 19

Nun modifizieren wir Gl.(2.76 b) geringfügig, indem wir die beiden Summanden auf einen Hauptnenner bringen, und erhalten

$$\underline{Y}_q = \frac{p}{(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_1^{*2})} \left\{ \frac{L^* \underline{u}_q \underline{u}_q^T + L \underline{u}_q^* \underline{u}_q^{*T}}{LL^*} p^2 - \frac{p_1^2 L^* \underline{u}_q \underline{u}_q^T + p_1^2 L \underline{u}_q^* \underline{u}_q^{*T}}{LL^*} \right\}. \quad (2.79a)$$

Wie eine nähere Untersuchung dieses Ausdrucks und ein Vergleich des bereits gelösten Falles für $n = 1$ [7] mit dem hier vorliegenden, allgemeinen Fall zeigen, besitzt die Schaltung in Bild 20 bei geeigneten reellen Elementwerten dieselbe Matrix $\underline{Y}_q$ wie die komplexe Schaltung in Bild 19.



$L_2, C_2, L_4, C_4,$

$$\underline{u}_a = \begin{bmatrix} -1 \\ u_{a1} \\ \vdots \\ u_{an} \end{bmatrix}, \underline{u}_b = \begin{bmatrix} -1 \\ u_{b1} \\ \vdots \\ u_{bn} \end{bmatrix}$$

alle reell; $k = 2, \dots, n.$

Bild 20

Die Analyse der Schaltung in Bild 20 führt auf die Leitwertmatrix

$$\underline{Y}_{q1} = \frac{p}{(p^2 + \frac{1}{L_2 C_2})(p^2 + \frac{1}{L_4 C_4}) + \frac{p^2}{L_2 C_4}} \left\{ \frac{1}{L_2} (\underline{u}_b \underline{u}_b^T p^2 + \frac{\underline{u}_a \underline{u}_a^T}{L_4 C_4}) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{L_4} (p^2 + \frac{1}{L_2 C_2}) (\underline{u}_a \underline{u}_a^T + \underline{u}_b \underline{u}_b^T) \right\}. \quad (2.79b)$$

Die Forderung, daß $\underline{Y}_{q1}$ und $\underline{Y}_q$ übereinstimmen sollen, führt über den Koeffizientenvergleich der rechten Seiten der Gln.

(2.79 a,b) zu den folgenden Werten der Schaltelemente und Übersetzungsverhältnisse:

$$L_2 = \frac{LL^*}{L + L^*}, \quad C_2 = -\frac{L p_1^2 + L^* p_1^{*2}}{(p_1 p_1^*)^2 LL^*}, \quad (2.80a,b)$$

$$L_4 = \left(\frac{LL^*}{L p_1^2 + L^* p_1^{*2}} \right)^2 \frac{(p_1^2 - p_1^{*2})^2}{L + L^*} = L_2 \frac{LL^* (p_1^2 - p_1^{*2})^2}{(L p_1^2 + L^* p_1^{*2})^2}, \quad (2.80c)$$

$$C_4 = -\left(\frac{L + L^*}{LL^*} \right)^2 \frac{L p_1^2 + L^* p_1^{*2}}{(p_1^2 - p_1^{*2})^2} = C_2 \frac{(L + L^*)^2 (p_1 p_1^*)^2}{LL^* (p_1^2 - p_1^{*2})^2}, \quad (2.80d)$$

$$\underline{u}_a = \frac{\underline{u}_g L^* p_i^{*2} + \underline{u}_g^* L p_i^2}{L^* p_i^{*2} + L p_i^2}, \quad \underline{u}_b = \frac{\underline{u}_g L^* + \underline{u}_g^* L}{L^* + L}. \quad (2.80e,f)$$

Wie aus einem Vergleich der Gln. (2.80 a,c) einerseits und (2.80 b,d) andererseits hervorgeht, gilt

$$L_2 L_4 < 0, \quad C_2 C_4 < 0, \quad (2.80g,h)$$

d.h., daß von den Elementen L_2 , L_4 und C_2 , C_4 jeweils eines positiv und eines negativ ist.

Wir veranschaulichen die bisher gewonnenen Ergebnisse in Bild 21, in dem $\underline{Y}_2$ als Parallelschaltung der Schaltung für $\underline{Y}_{21}$ und des n-Tors, das durch $\underline{Y}_3$ beschrieben wird, verwirklicht ist.

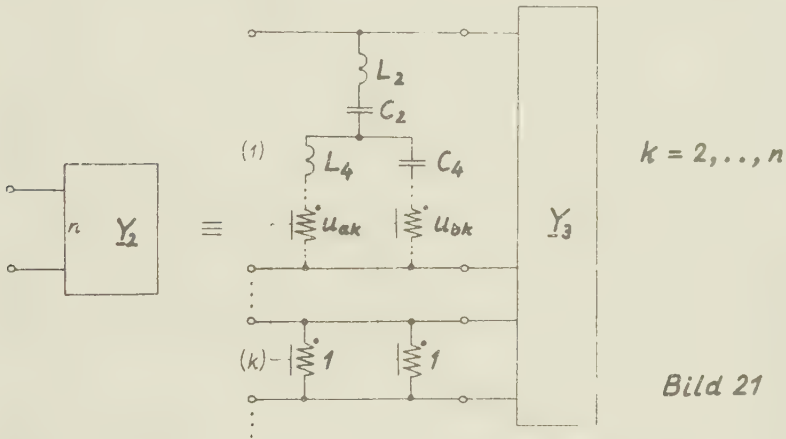


Bild 21

Wir kehren zurück zu $\underline{Y}_3$, von dessen Inverser $\underline{Z}_3$ wir im letzten Entwicklungsschritt die Pole bei $p = 0$ und $p = \infty$ abspalten wollen. Die Polresiduen sind in beiden Fällen psd, da wir $\underline{Y}_3$ und damit auch $\underline{Z}_3$ als symmetrische PRM erkannt hatten. Somit gilt

$$\underline{Y}_3^{-1} = \underline{Z}_3 = p \underline{L}_{III} + \frac{\underline{D}_{III}}{p} + \underline{Z}_4 \quad (2.81)$$

mit den noch unbekannten Residuen $\underline{L}_{III}$ und $\underline{D}_{III}$. $\underline{Z}_4$ ist Impedanzmatrix ohne Pole auf der imaginären Achse.

Zur Bestimmung der Matrizen $\underline{L}_{III}$ und $\underline{D}_{III}$ benötigen wir die beiden Gleichungen, welche die bisher vollzogenen Abspaltschritte beschreiben.

Erste Abspaltung nach Gl. (2.47):

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 - p \underline{L}_1 \underline{u}_L \underline{u}_L^T - \frac{1}{p C_1} \underline{u}_C \underline{u}_C^T \quad (L_1, C_1 > 0; \underline{u}_L, \underline{u}_C \text{ reell}) \quad (2.82a)$$

Zweite Abspaltung nach Gl.(2.76 a) mit Gl.(2.79 b):

$$\underline{Y}_3 = \underline{Z}_2^{-1} - \frac{p}{(p^2 + \frac{1}{L_2 C_2})(p^2 + \frac{1}{L_4 C_4}) + \frac{p^2}{L_2 C_4}} \left\{ \frac{1}{L_2} (\underline{u}_b \underline{u}_L^T p^2 + \frac{\underline{u}_a \underline{u}_L^T}{L_4 C_4}) + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{L_4} (p^2 + \frac{1}{L_2 C_2}) (\underline{u}_a - \underline{u}_b) (\underline{u}_a^T - \underline{u}_b^T) \right\} \quad (2.82b)$$

Durch Einsetzen der Gln.(2.82 a,b) in Gl.(2.81) ergibt sich

$$\underline{Z}_3(p) = \left\{ (\underline{Z}_1(p) - p \underline{L}_1 \underline{u}_L \underline{u}_L^T - \frac{1}{p C_1} \underline{u}_C \underline{u}_C^T)^{-1} - \underline{Y}_{q1} \right\}^{-1},$$

und nach der Invertierung der mit (-1) potenzierten Matrizen

$$\underline{Z}_3 \left\{ -\underline{Y}_{q1} \left(\underline{Z}_1 - p \underline{L}_1 \underline{u}_L \underline{u}_L^T - \frac{1}{p C_1} \underline{u}_C \underline{u}_C^T \right) + \underline{1}_n \right\} = \\ = \underline{Z}_1 - p \underline{L}_1 \underline{u}_L \underline{u}_L^T - \frac{1}{p C_1} \underline{u}_C \underline{u}_C^T. \quad (2.83)$$

Wir untersuchen das Verhalten von Gl.(2.83) bei den Polfrequenzen $p = 0$ und $p = \infty$. Dabei berücksichtigen wir, daß $\underline{Z}_1(p)$ und $\underline{Z}_4(p)$ bei diesen Frequenzen regulär sind. Für $p \rightarrow \infty$ geht dann Gl.(2.83) mit den Gln.(2.81), (2.79 b) über in

$$\underline{L}_{III} \left\{ - \left(\frac{\underline{u}_b \underline{u}_b^T}{L_2} + \frac{(\underline{u}_a - \underline{u}_b)(\underline{u}_a^T - \underline{u}_b^T)}{L_4} \right) (-\underline{L}_1 \underline{u}_L \underline{u}_L^T + \underline{1}_n) \right\} = -\underline{L}_1 \underline{u}_L \underline{u}_L^T. \quad (2.84a)$$

Damit ist das Residuum $\underline{L}_{III}$ von der Form

$$\underline{L}_{III} = \underline{L}_3 \underline{u}_L \underline{u}_L^T,$$

wobei bekanntlich $\underline{L}_3$ positiv ist und wegen Gl.(2.84 a) mit den übrigen Induktivitäten $\underline{L}_1, \underline{L}_2, \underline{L}_4$ sowie den Vektoren $\underline{u}_L, \underline{u}_a, \underline{u}_b$ in folgendem Zusammenhang steht:

$$\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_3} + \frac{(\underline{u}_L^T \underline{u}_b)^2}{L_2} + \frac{\{\underline{u}_L^T (\underline{u}_a - \underline{u}_b)\}^2}{L_4} = 0, \quad (2.85a)$$

oder

$$\underline{L}_1 \underline{L}_2 \underline{L}_3 \{\underline{u}_L^T (\underline{u}_a - \underline{u}_b)\}^2 + \underline{L}_2 \underline{L}_3 \underline{L}_4 + \underline{L}_3 \underline{L}_4 \underline{L}_1 (\underline{u}_L^T \underline{u}_b)^2 + \underline{L}_4 \underline{L}_1 \underline{L}_2 = 0.$$

Für $p \rightarrow 0$ bekommt man entsprechend

$$\underline{D}_{III} \left\{ - \left(\underline{C}_2 \underline{u}_a \underline{u}_a^T + \underline{C}_4 (\underline{u}_a - \underline{u}_b)(\underline{u}_a^T - \underline{u}_b^T) \right) \left(-\frac{\underline{u}_C \underline{u}_C^T}{C_1} \right) + \underline{1}_n \right\} = -\frac{\underline{u}_C \underline{u}_C^T}{C_1}. \quad (2.84b)$$

Das Residuum $\underline{E}_{III}$ hat also die Form

$$\underline{D}_{III} = \frac{\underline{u}_c \underline{u}_c^T}{C_3}$$

C_3 ist wie L_3 positiv und erfüllt wegen Gl.(2.84 b) mit den übrigen Kapazitäten C_1, C_2, C_4 sowie den Vektoren $\underline{u}_c, \underline{u}_a, \underline{u}_b$ die Beziehung

$$C_1 + C_3 + C_2 (\underline{u}_c^T \underline{u}_a)^2 + C_4 \{ \underline{u}_c^T (\underline{u}_a - \underline{u}_b) \}^2 = 0. \quad (2.85b)$$

Die Gln.(2.85 a,b) können offenbar nur dann befriedigt werden, wenn in beiden Fällen wenigstens einer der vier Summanden negativ wird. An früherer Stelle hatten wir festgestellt, daß dies zutrifft, und zwar ist wegen der Beziehungen (2.80 g,h) jeweils einer der beiden letzten Summanden in den Gln.(2.85 a,b) negativ. Wir leiten in diesem Zusammenhang noch einige Ungleichungen ab, von denen später Gebrauch gemacht werden wird.

Gegeben sind die Gln.(2.85 a,b) und die Ungln.(2.80 g,h). Bekannt ist außerdem, daß die Elemente L_1, L_3, C_1, C_3 sämtlich positiv sind. Führt man die Abkürzungen

$$S_a = \underline{u}_c^T (\underline{u}_a - \underline{u}_b), \quad S_b = \underline{u}_c^T (\underline{u}_b - \underline{u}_a), \quad (2.86a,b)$$

$$S_c = \underline{u}_c^T \underline{u}_b, \quad S_d = \underline{u}_c^T \underline{u}_a \quad (2.86c,d)$$

ein, so bekommt man aus den Beziehungen (2.85 a),(2.80 g) nach kurzer Zwischenrechnung

$$K_L = \frac{L_4 + L_1 S_a^2}{L_1} > 0, \quad \frac{L_1 + L_3 S_c^2}{L_3} > 0, \quad (2.87)$$

und zwar unabhängig davon, ob L_2 oder L_4 negativ ist. Entsprechend ergibt sich aus den Beziehungen (2.85 b),(2.80 h)

$$K_C = \frac{C_1 + C_4 S_b^2}{C_4} > 0, \quad \frac{C_3 + C_2 S_d^2}{C_2} > 0, \quad (2.88)$$

ebenfalls unabhängig davon, welcher der beiden Werte C_2, C_4 negativ ist.

Der Entwicklungszyklus für den Fall 2 der komplexen Entwicklungsstelle p_2 ist damit abgeschlossen. Über die Restmatrix $\underline{Z}_4$ ist noch zu sagen, daß sich ihr Grad gegenüber dem Grad von $\underline{Z}_3$ durch die Abspaltung der beiden Pole $\underline{p}_{III}$ und $\underline{E}_{III}/p$, mit jeweils psd Residuum vom Rang 1, um zwei vermindert hat. Damit beträgt die gesamte Gradreduktion nach einem Entwicklungszyklus vier,

ideale Übertrager enthalten. Diese Schaltungen sind infolgedessen kanonisch und realisierbar. Die beiden Fälle 1 und 2, die durch die unterschiedliche Lage der Entwicklungsstellen charakterisiert sind, werden weiter getrennt behandelt.

II.2.4.1. Entwicklungsstelle auf dem Rand

Wir gehen aus von der Schaltung, die uns aus dem 1. Abschnitts II.2.3.1. vorlag, und die dort in Bild 16 abgebildet ist. Bild 23 zeigt davon den Ausschnitt, um dessen äquivalente Umformung es hier geht. Das Ergebnis dieser Umformung wird dasselbe sein wie bei Tellegen [4], doch soll zu seiner Gewinnung hier ein etwas anderer Weg eingeschlagen werden.

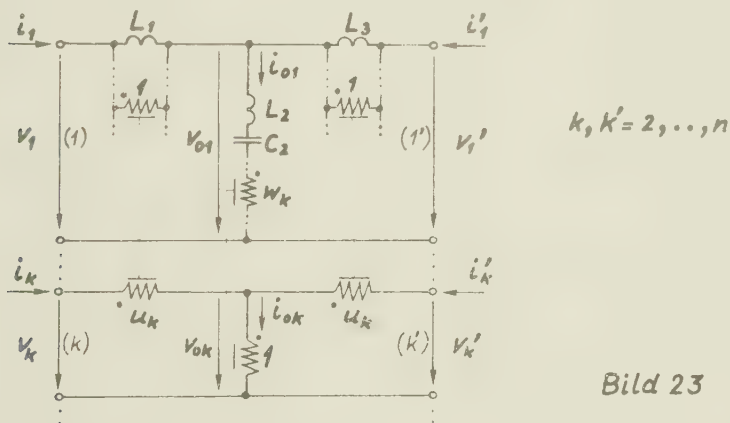


Bild 23

Die Aufgabe besteht zunächst darin, für das $2n$ -Tor in Bild 23 eine Matrizenbeschreibung zu finden. Existiert eine solche Matrix, und erfüllt sie die Bedingungen von Satz 4, so stellt sie die Hybridmatrix eines realisierbaren Netzwerks dar. Führen wir außer den Vektoren $\underline{u}$ und $\underline{w}$ noch die Spannungs- und Stromvektoren

$$\left. \begin{aligned} \underline{v} &= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, & \underline{v}' &= \begin{bmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix}, & \underline{v}_o &= \begin{bmatrix} v_{o1} \\ \vdots \\ v_{on} \end{bmatrix}, \\ \underline{i} &= \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}, & \underline{i}' &= \begin{bmatrix} i'_1 \\ \vdots \\ i'_n \end{bmatrix}, & \underline{i}_o &= \begin{bmatrix} i_{o1} \\ \vdots \\ i_{on} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (2.89)$$

ein, so können wir aus Bild 23 das folgende Gleichungssystem

ableiten, welches die Schaltung vollständig beschreibt:

$$\underline{w}^T \underline{v}_0 + (pL_2 + \frac{1}{pC_2}) \underline{E}_{n1}^T \underline{i}_0 = 0 \quad (2.90a)$$

$$\underline{i}_0 + \underline{w} \underline{E}_{n1}^T \underline{i}_0 = 0 \quad (2.90b)$$

$$\underline{i}' + \underline{i} = \underline{i}_0 \quad (2.90c)$$

$$\underline{v}_0 + pL_1 \underline{u} \underline{u}^T \underline{i} = \underline{v} \quad (2.90d)$$

$$\underline{v}_0 + pL_3 \underline{u} \underline{u}^T \underline{i}' = \underline{v}' \quad (2.90e)$$

Aus diesen Gleichungen eliminieren wir die "internen" Vektoren $\underline{v}_0$ und $\underline{i}_0$. Durch Einsetzen von Gl.(2.90 c) in Gl.(2.90 b) erhält man

$$(\underline{i} + \underline{i}')(\underline{1}_n + \underline{w} \underline{E}_{n1}^T) = 0 \quad (2.91a)$$

Weiterhin bekommt man aus Gl.(2.90 a) mit $\underline{1}_0$ aus Gl.(2.90 c) und mit $\underline{w}^T \underline{v}_0$ z.B. aus Gl.(2.90 d)

$$\underline{w}^T \underline{v} + (pL_2 + \frac{1}{pC_2}) \underline{E}_{n1}^T (\underline{i} + \underline{i}') - pL_1 \underline{w}^T \underline{u} \underline{u}^T \underline{i} = 0 \quad (2.91b)$$

Die dritte von $\underline{v}_0$ und $\underline{i}_0$ freie Gleichung gewinnen wir durch Differenzbildung der Gln.(2.90 d,e):

$$\underline{v} + pL_3 \underline{u} \underline{u}^T \underline{i}' - pL_1 \underline{u} \underline{u}^T \underline{i} = \underline{v}' \quad (2.91c)$$

Die Gln.(2.91 a-c) stellen ein System von $2n$ skalaren Gleichungen in $4n$ Variablen, nämlich Spannungen und Strömen, dar. Man muß nun dieses System so umformen, daß $2n$ der Variablen über ein lineares Gleichungssystem von den restlichen $2n$ Variablen abhängen. Natürlich ist man in der Wahl der abhängigen Variablen nicht völlig frei, da nur in einem kleinen Teil der Möglichkeiten ein Gleichungssystem der angegebenen Art existiert. Eine genauere Untersuchung der Gln.(2.91 a-c) zeigt, daß man eines dieser Systeme findet, wenn man $\underline{u}$, $\underline{w}$ und die Vektoren der Gl.(2.89) nach dem Muster

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ 1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underline{E}_{n1} v_1 + \underline{F}_{n,n-1} v_2 \quad (2.92)$$

aufteilt und z.B. den $2n$ -Vektor

$$\begin{bmatrix} \underline{v}'^T & \underline{v}_1 & \underline{i}_2^T \end{bmatrix}^T$$

als das $2n$ -Tupel abhängiger Variablen wählt, führt man nämlich die nach Gl.(2.92) partitionierten Vektoren in die Gln. (2.91 a-c) ein, so tauchen die $4n$ Variablen in diesen Gleichungen in Form der Vektoren $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{i}_1$, $\underline{i}_2$, $\underline{v}'$, $\underline{i}'$ auf. Isoliert man davon - wie angedeutet - die Vektoren $\underline{v}_1$, $\underline{i}_2$ und $\underline{v}'$ auf einer Seite, so erhält man schließlich folgendes Gleichungssystem in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}' \\ \underline{v}_1 \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \underline{L} \underline{m}^T + \frac{1}{pC} \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T & p \underline{L} \underline{m} + \frac{1}{pC} \underline{E}_{n1} & \underline{E}_{n1} \underline{w}_2^T + \underline{F}_{n,n-1} \\ p \underline{L} \underline{m}^T + \frac{1}{pC} \underline{E}_{n1}^T & p \underline{L} + \frac{1}{pC} & \underline{w}_2^T \\ -(\underline{w}_2 \underline{E}_{n1}^T + \underline{F}_{n,n-1}) & -\underline{w}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}' \\ \underline{i}_1 \\ \underline{v} \end{bmatrix}$$

$$\left(C = C_2, \quad L = L_2 + L, (\underline{u}^T \underline{w})^2 > 0, \quad \underline{m} = \underline{E}_{n1} + \underline{u} \frac{L_1 \underline{u}^T \underline{w}}{L_1 + L, (\underline{u}^T \underline{w})^2} \right.$$

$$\left. \underline{m} = [m_1, \dots, m_n]^T \right) \quad (2.93)$$

Dieses Ergebnis ist im wesentlichen identisch mit dem von Tellegen [4]. Es ist für die reelle Entwicklungsstelle selbstverständlich ebenso gültig wie für die imaginäre. Die $(2n, 2n)$ -Matrix in Gl.(2.93), die wir mit $\underline{H}$ bezeichnen wollen, ist Satz 4 zufolge als Hybridmatrix eines Reaktanz- $2n$ -Tores realisierbar. Dabei ist entscheidend, daß L wegen Gl.(2.37) und C positiv sind. Wie man sich - unter Bezugnahme auf Abschn. 1.5.5. klarmacht, können weitere Hybridmatrizen für die Schaltung von Bild 23 als Gyrationen um irgendwelche nichtverschwindende Diagonalelemente von $\underline{H}$ erzeugt werden.

Da die Hybridbeziehung (2.93) in einer Gestalt vorliegt, die bei den Sätzen in Teil I durchweg vorausgesetzt wurde, ist bei der Realisierung von $\underline{H}$ eine direkte Übernahme der dortigen Ergebnisse möglich. Wir stellen $\underline{H}$ durch eine Partialbruchzerlegung gemäß Gl.(1.29) dar. Sie lautet

$$\underline{H} = \frac{1}{p} \underline{P}_0 + p \underline{P}_\infty + \tilde{\underline{P}}_s = \underline{H}_0 + \underline{H}_\infty + \underline{H}_s, \quad (2.94a)$$

wobei für die einzelnen Matrizen $\underline{P}_i$ ($i = 0, \infty, s$) gilt:

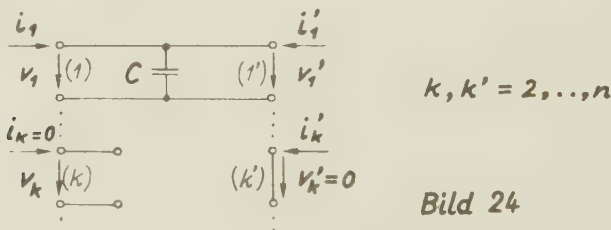
$$\begin{aligned} \underline{P}_0 &= \frac{1}{C} \begin{bmatrix} \underline{E}_n, \underline{E}_n^T & \underline{E}_n, & 0 \\ \underline{E}_n^T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{P}_\infty = L \begin{bmatrix} \underline{m} \underline{m}^T & \underline{m} & 0 \\ \underline{m}^T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{\underline{P}}_s &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \underline{E}_n, \underline{w}_2^T + \underline{F}_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \underline{w}_2^T \\ -(\underline{w}_2 \underline{E}_n^T + \underline{F}_{n,n-1}^T) & -\underline{w}_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.94 b)$$

Bei der Verwirklichung der drei Summanden machen wir Gebrauch von Satz 29 und den daran anschließend behandelten Sonderfällen. Der Grundgedanke ist folgender. Durch eine oder mehrere hybride Kongruenztransformationen wird die zu realisierende Matrix $\underline{H}_1$ in eine Matrix $\underline{K}_1$ von so einfacher Gestalt überführt, daß deren Schaltung sofort angegeben werden kann. An dieser Stelle kommt nun Satz 29 zur Anwendung. Die gesuchte Schaltung für $\underline{H}_1$ bekommt man jetzt nämlich unmittelbar durch die in Bild 7 angedeutete Zusammenschaltung des Netzwerks für $\underline{K}_1$ mit den durch die Kongruenztransformation beschriebenen Übertragernetzwerken.

Die Schaltung für $\underline{H}_0$ kann praktisch sofort angegeben werden, wenn wir uns die Strom-Spannungsgleichungen für diese Matrix ansehen¹⁾:

$$\underline{i}_1 = 0, \quad \underline{i}_1' = 0, \quad \underline{v}_1 = \frac{1}{pC} (\underline{i}_1 + \underline{i}_1'), \quad \underline{v}_1' = \underline{v}_1. \quad (2.95)$$

Dazu gehört folgende einfache Schaltung:



Als zweite Matrix soll $\underline{H}_\infty$, die wie $\underline{H}_0$ vom Rang 1 ist, verwirklicht werden. Wir wenden auf sie die hybride Kongruenztransformation mit der Transformationsmatrix

1) Der Einfachheit halber werden in allen drei Fällen ($\underline{H}_0$, $\underline{H}_\infty$, $\underline{H}_s$) dieselben Variablenbezeichnungen verwendet wie in Gl.(2.93).

$$\underline{I}_{\infty} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{a,\infty} & 0 \\ 0 & \underline{1}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{I}_{a,\infty} = \begin{bmatrix} \underline{1}_n & 0 \\ -\underline{m}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.96a)$$

an und bekommen mit Gl.(2.94 c)

$$\underline{P}_{\infty,1} = \underline{I}_{\infty}^T \underline{P}_{\infty} \underline{I}_{\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.96b)$$

Führt man entsprechend zu Satz 29 die zu $\underline{P}_{\infty,1}$ gehörigen, transformierten Variablenvektoren

$$[\underline{v}_1'^T | \underline{v}_n | \underline{i}_{21}']^T, \quad [\underline{i}_1'^T | \underline{i}_n | \underline{v}_{21}']^T$$

ein, die mit den ursprünglichen über die Beziehungen

$$\begin{bmatrix} \underline{i}_1' \\ \underline{i}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{1}_n & 0 \\ -\underline{m}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_1' \\ \underline{i}_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{v}_1' \\ \underline{v}_1 \end{bmatrix} = (\underline{I}_{a,\infty}^{-1})^T \begin{bmatrix} \underline{v}_1' \\ \underline{v}_n \end{bmatrix}, \quad (2.97a,b)$$

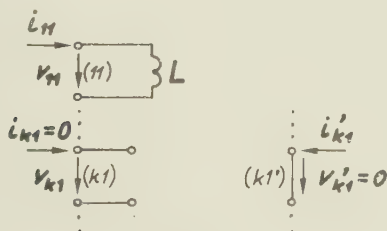
$$\underline{v}_2 = \underline{v}_{21}, \quad \underline{i}_2 = \underline{i}_{21} \quad (2.97c,d)$$

verknüpft sind¹⁾, so bekommt man für die transformierte Matrix

$\underline{H}_{\infty,1} = p \underline{P}_{\infty,1}$ die Strom-Spannungsgleichungen

$$\underline{v}_1' = 0, \quad \underline{i}_{21} = 0, \quad \underline{v}_n = pL \underline{i}_n, \quad (2.98a)$$

und daraus die einfache Schaltung nach Bild 25.



$$k1 = 2, \dots, n;$$

$$k1' = 1, \dots, n.$$

Bild 25

Für den Kongruenzübertrager, der durch Gl.(2.97 a) definiert ist, schreiben wir die Komponentengleichungen an:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= -\sum_{k=1}^n m_k i_{k1}' + i_n, \\ i_k' &= i_{k1}' \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} (2.98b)$$

Sie beschreiben gemäß Satz 29 das in Bild 26 dargestellte Netzwerk (vgl. auch Bild 8).

1) Die Gln.(2.97 a,b) beschreiben beide denselben Sachverhalt.

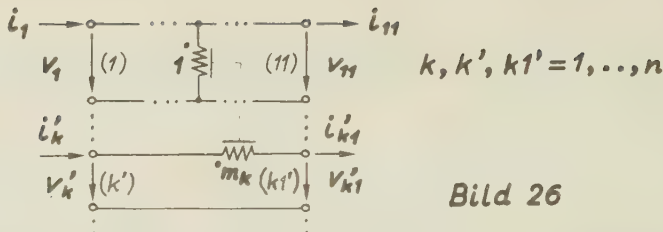


Bild 26

Berücksichtigt man noch, daß den Gln.(2.97 c,d) elektrisch gesehen die galvanische Verbindung der Tore (k) und (k1) entspricht ($k, k1 = 2, \dots, n$), so erhält man für $\underline{H}_\infty$ die Schaltung in Bild 27.

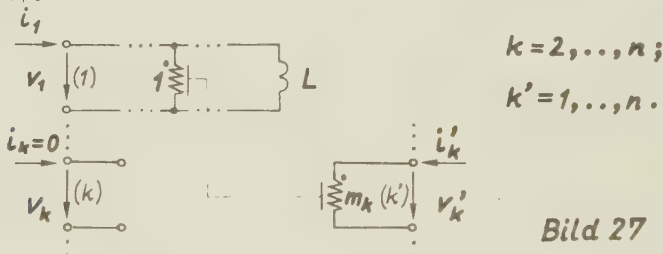


Bild 27

Bei der Realisierung von $\underline{H}_S$ verfahren wir in entsprechender Weise wie bei $\underline{H}_\infty$. Wir benutzen dabei die nichtsinguläre Transformationsmatrix

$$\underline{I}_s = \begin{bmatrix} \underline{I}_{a,s} & 0 \\ 0 & \underline{1}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{I}_{a,s} = \begin{bmatrix} \underline{1}_n & -\underline{F}_{n,n-1} \underline{W}_2 \\ -\underline{E}_{n1}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.99a)$$

Die Transformation von $\underline{\tilde{P}}_S$ nach Gl.(2.94 b) mit $\underline{I}_s$ führt zu

$$\underline{\tilde{P}}_{s,1} = \underline{I}_s^T \underline{\tilde{P}}_S \underline{I}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \underline{F}_{n,n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\underline{F}_{n,n-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.99b)$$

Die transformierten Variablenvektoren

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_1'^T & \underline{v}_n & \underline{i}_{21}^T \end{bmatrix}^T, \quad \begin{bmatrix} \underline{i}_1'^T & \underline{i}_n & \underline{v}_{21}^T \end{bmatrix}^T$$

stehen vermöge $\underline{I}_s$ mit den ursprünglichen in dem Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} \underline{i}' \\ \underline{i}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{1}_n & -\underline{F}_{n,n-1} \underline{W}_2 \\ -\underline{E}_{n1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_1' \\ \underline{i}_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{v}' \\ \underline{v}_1 \end{bmatrix} = (\underline{I}_{a,s}')^T \begin{bmatrix} \underline{v}_1' \\ \underline{v}_n \end{bmatrix}, \quad (2.100a,b)$$

$$\underline{v}_2 = \underline{v}_{21} \quad , \quad \underline{i}_2 = \underline{i}_{21} \quad . \quad (2.100c,d)$$

Die Gleichungen für $\underline{H}_{S,1} = \underline{\tilde{P}}_{S,1}$ lauten somit

$$\underline{v}_{11}' = 0, \quad \underline{v}_{11} = 0, \quad \underline{v}_{21}' = \underline{v}_{21}, \quad \underline{i}_{21}' = -\underline{i}_{21}' \quad . \quad (2.101a)$$

Dazu gehört das nur aus kurzgeschlossenen und durchverbundenen Toren bestehende Netzwerk in Bild 28 a.

Die Komponentengleichungen für den durch Gl.(2.100 a) definierten Kongruenzübertrager heißen

$$\left. \begin{aligned} \underline{i}_k' &= \underline{i}_{k1}' - w_k \underline{i}_{11} \quad (k=2, \dots, n), \\ \underline{i}_1' &= \underline{i}_{11}', \quad \underline{i}_1 = -\underline{i}_{11}' + \underline{i}_{11}. \end{aligned} \right\} (2.101b)$$

Die Schaltung hierzu veranschaulicht Bild 28 b.

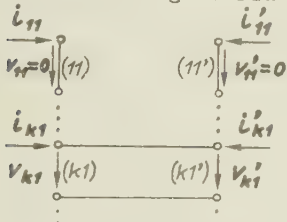


Bild 28a

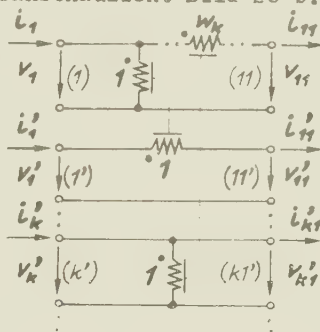
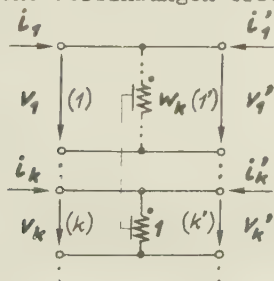


Bild 28b

$$\begin{aligned} k', k1, k1' &= \\ &= 2, \dots, n \end{aligned}$$

Interpretiert man die Gln.(2.100 c,d) in bereits bekanntem Sinne, so ergibt sich schließlich für $\underline{H}_S$ die in Bild 29 gezeigte Realisierung. Dabei wurde der noch in Bild 28 a vorhandene Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis 1:1 durch galvanische Verbindungen ersetzt.

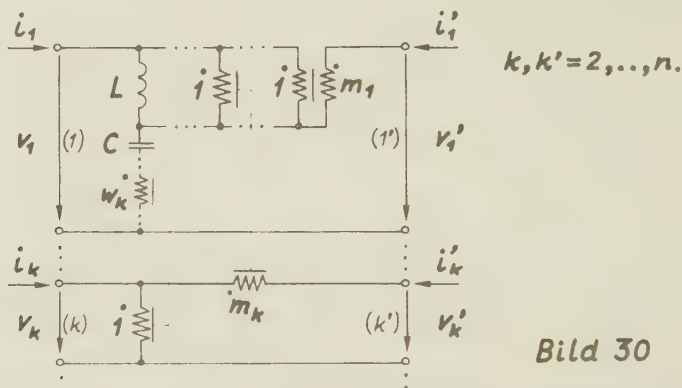


$$k, k' = 2, \dots, n$$

Bild 29

Wir können nun die - letztlich gesuchte - Schaltung für $\underline{H}$ nach

den Gln.(2.93),(2.94 a) mit Hilfe von Satz 17 dadurch konstruieren, daß wir die drei $2n$ -Tore für $\underline{H}_0$, $\underline{H}_\infty$ und $\underline{H}_s$ an den Toren (1') bis (n') und (1) in Reihe, an den Toren (2) bis (n) aber parallel schalten. Sie ist in Bild 30 dargestellt und - wie erwähnt - mit dem von Tellegen [4] gefundenen Netzwerk identisch.



Das gefundene $2n$ -Tor ist offenbar realisierbar; es ist auch kanonisch, da es - außer idealen Übertragern - nur die zwei positiven Reaktanzen L und C enthält. Die Zahl der Reaktanzen ist damit gleich der Gradverminderung der Impedanzmatrix während eines Entwicklungszyklus. Tellegen hat zudem gezeigt, daß die Zahl sämtlicher Elemente (ein idealer Übertrager zählt als ein Element) gleich $2n + 1$ ist, d.h. gleich der Anzahl der freien Parameter von $\underline{H}$ in Gl.(2.93).

Die obige Äquivalenztransformation wurde deshalb in allen Einzelheiten beschrieben, weil das Verfahren bei der Äquivalenten Umformung des Reaktanz- $2n$ -Tores in Bild 22 im Prinzip in gleicher Weise Anwendung findet und außerdem auch in Kap.II.3. benötigt wird. Aus dem erstgenannten Grund sind verschiedene Überlegungen und Motivationen in beiden Fällen identisch und können ohne neuerliche Herleitung übernommen werden. Allerdings ist die - im folgenden Abschnitt behandelte - Äquivalenztransformation des Reaktanz- $2n$ -Tors von Bild 22 erheblich komplizierter, da dieses Netzwerk die jeweils doppelte Anzahl von Reaktanzen und idealen Übertragern enthält.

II.2.4.2. Entwicklungsstelle im Innern des ersten Quadranten

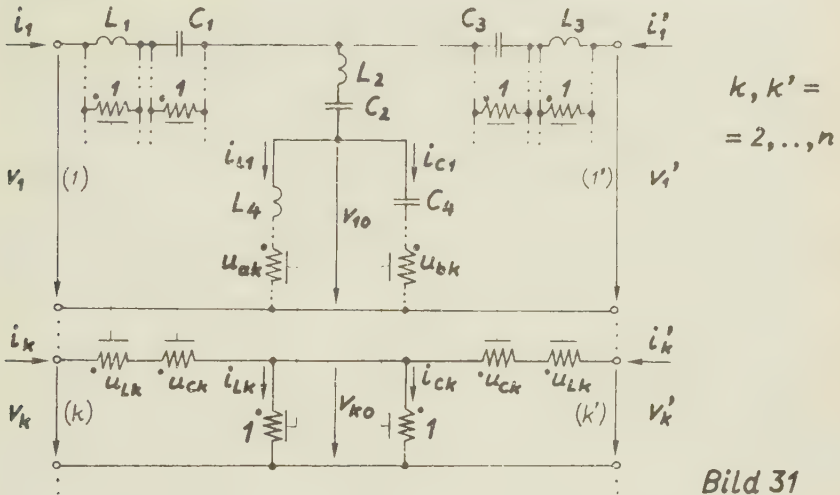


Bild 31 zeigt - als Ausschnitt des n -Tors in Bild 22 - das Reaktanz- $2n$ -Tor, das wir hier durch eine äquivalente Umformung in ein realisierbares, kanonisches Netzwerk überführen wollen. Wir suchen zunächst eine Matrizenbeschreibung des $2n$ -Tors und führen zu diesem Zweck außer $\underline{u}_L$, $\underline{u}_C$, $\underline{u}_a$, $\underline{u}_b$ und den in Gl.(2.39) definierten Vektoren (außer $\underline{1}_0$) zusätzlich die Stromvektoren

$$\underline{i}_L = [i_{L1}, \dots, i_{Ln}]^T, \quad \underline{i}_C = [i_{C1}, \dots, i_{Cn}]^T \quad (2.102)$$

ein. Damit läßt sich aus Bild 31 das folgende, die Schaltung vollständig beschreibende Gleichungssystem herleiten:

$$\underline{u}_a^T \underline{v}_0 + p L_4 E_{n1}^T \underline{i}_L = 0, \quad (2.103a)$$

$$\underline{u}_b^T \underline{v}_0 + \frac{1}{p C_4} E_{n1}^T \underline{i}_C = 0, \quad (2.103b)$$

$$\underline{i} + \underline{i}' = \underline{i}_L + \underline{i}_C, \quad (2.103c)$$

$$(\underline{u}_a E_{n1}^T + \underline{1}_n) \underline{i}_L = 0, \quad (2.103d)$$

$$(\underline{u}_b E_{n1}^T + \underline{1}_n) \underline{i}_C = 0, \quad (2.103e)$$

$$\underline{v}_0 + (p L_1 \underline{u}_L \underline{u}_L^T + \frac{\underline{u}_C \underline{u}_C^T}{p C_1}) \underline{i} + E_{n1} E_{n1}^T (\underline{i} + \underline{i}') (p L_2 + \frac{1}{p C_2}) = \underline{v}, \quad (2.103f)$$

$$\underline{v}_0 + (p L_3 \underline{u}_L \underline{u}_L^T + \frac{\underline{u}_C \underline{u}_C^T}{p C_3}) \underline{i}' + E_{n1} E_{n1}^T (\underline{i} + \underline{i}') (p L_2 + \frac{1}{p C_2}) = \underline{v}', \quad (2.103g)$$

Durch die Eliminierung von $\underline{v}_0$, $\underline{i}_L$ und $\underline{i}_C$ aus dem obigen Gleichungssystem bleiben drei Gleichungen in den Vektoren $\underline{v}$, $\underline{v}'$, $\underline{i}$ und $\underline{i}'$ übrig:

$$\underline{v} - \underline{v}' = (pL_1 \underline{u}_1 \underline{u}_1^T + \frac{u_c u_c^T}{pC_1}) \underline{i} - (pL_3 \underline{u}_1 \underline{u}_1^T + \frac{u_c u_c^T}{pC_3}) \underline{i}' \quad (2.104a)$$

$$(\underline{u}_a E_{n_1}^T + 1_n) (\underline{i} + \underline{i}') \frac{1}{pC_4} + (\underline{u}_a - \underline{u}_b) \underline{u}_b^T \{ \underline{v} - (pL_1 \underline{u}_1 \underline{u}_1^T + \frac{u_c u_c^T}{pC_1}) \underline{i} - \dots \\ \dots - E_{n_1} E_{n_1}^T (\underline{i} + \underline{i}') (pL_2 + \frac{1}{pC_2}) \} = 0 \quad (2.104b)$$

$$(\underline{u}_b E_{n_1}^T + 1_n) (\underline{i} + \underline{i}') pL_4 + (\underline{u}_b - \underline{u}_a) \underline{u}_a^T \{ \underline{v} - (pL_1 \underline{u}_1 \underline{u}_1^T + \frac{u_c u_c^T}{pC_1}) \underline{i} - \dots \\ \dots - E_{n_1} E_{n_1}^T (\underline{i} + \underline{i}') (pL_2 + \frac{1}{pC_2}) \} = 0 \quad (2.104c)$$

Diese drei Gleichungen in - durch die Vektoren $\underline{v}$, $\underline{v}'$, $\underline{i}$, $\underline{i}'$ repräsentierten - $4n$ Variablen stellen eine vollständige äußere Beschreibung unseres $2n$ -Tors dar. Nach umfangreichen algebraischen Umformungen läßt sich aus ihnen eine Matrizendarstellung gewinnen. Vorher müssen die in den Gln.(2.104 a-c) vorkommenden Vektoren nach dem Muster von Gl.(2.92) aufgeteilt werden. Man kann dann $2n$ der $4n$ Variablen als abhängige Variablen auf die linke Seite eines linearen Gleichungssystems in den $2n$ restlichen Variablen bringen. Bedingt durch den niedrigen Rang des Gleichungssystems (2.104 a-c) kann man die abhängigen Variablen nicht völlig frei wählen. Wir kommen aber zum Ziel, wenn wir dieselben Variablen wie an der entsprechenden Stelle des letzten Abschnitts wählen, stellt doch das dort behandelte Netzwerk einen Sonderfall zu dem Netzwerk in Bild 31 dar. Das Ergebnis der geschilderten Maßnahmen ist die folgende Hybridbeschreibung für das $2n$ -Tor in Bild 31:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}' \\ \underline{v}_1 \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix} = \underline{H} \begin{bmatrix} \underline{i}' \\ \underline{i}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{11,1} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{11,1}^T & h_n & \underline{H}_{12,1} \\ -\underline{H}_{12}^T & -\underline{H}_{12,1}^T & \underline{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ n-1 \\ n-1 \end{matrix} \quad (2.105a)$$

Die mit $\underline{H}$ bezeichnete Matrix in Gl.(2.105 a) ist entsprechend Gl.(1.29) durch die Partialbruchzerlegung

$$\underline{H}(p) = \frac{\underline{P}_0}{p} + p \underline{P}_\infty + \underline{\tilde{P}}_s + \frac{\underline{P}_1 p + \underline{\tilde{P}}_1}{p^2 + \omega_1^2} \quad (2.105b)$$

darstellbar, in der die einzelnen Summanden die nachstehende Gestalt haben:

$$\underline{P}_0 = \frac{1}{C_0} \begin{bmatrix} \underline{u}_0 \underline{u}_0^T & \underline{u}_0 & 0 \\ \underline{u}_0^T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\underline{u}_0 = \underline{E}_{n1} - \underline{u}_c S_d \frac{C_2}{C_3}) , \quad (2.105c)$$

$$\underline{P}_\infty = L_0 \begin{bmatrix} \underline{u}_\infty \underline{u}_\infty^T & \underline{u}_\infty & 0 \\ \underline{u}_\infty^T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\underline{u}_\infty = \underline{E}_{n1} - \underline{u}_L S_c \frac{L_2}{L_1}) , \quad (2.105d)$$

$$\tilde{\underline{P}}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \underline{F}_{n,n-1} + \underline{E}_{n1} \underline{u}_{b2}^T - \frac{S_a}{K_L} (S_c \underline{E}_{n1} + \underline{u}_L) \ddot{\underline{u}}_2^T \\ 0 & 0 & \underline{u}_{b2}^T - \frac{S_a S_c}{K_L} \ddot{\underline{u}}_2^T \\ -\underline{F}_{n,n-1}^T - \underline{u}_{b2} \underline{E}_{n1}^T + \frac{S_a}{K_L} \ddot{\underline{u}}_2 (S_c \underline{E}_{n1}^T + \underline{u}_L^T) & -\underline{u}_{b2} + \frac{S_a S_c}{K_L} \ddot{\underline{u}}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.105e)$$

$$\underline{P}_p + \tilde{\underline{P}}_1 = \begin{bmatrix} p \frac{K_c}{C_1} \underline{w}_1 \underline{w}_1^T & p \frac{K_c t_1}{C_1} \underline{w}_1 & \omega_1^2 \underline{w}_1 \ddot{\underline{u}}_2^T \\ p \frac{K_c t_1}{C_1} \underline{w}_1^T & p \frac{K_c t_1^2}{C_1} & \omega_1^2 t_1 \ddot{\underline{u}}_2^T \\ -\omega_1^2 \ddot{\underline{u}}_2 \underline{w}_1^T & -\omega_1^2 t_1 \ddot{\underline{u}}_2 & p \frac{1}{K_L L_1} \ddot{\underline{u}}_2 \ddot{\underline{u}}_2^T \end{bmatrix} . \quad (2.105f)$$

Die in den Gln.(2.105 b-f) neu eingeführten Abkürzungen bedeuten

$$C_0 = (C_3 + S_d^2 C_2) \frac{C_2}{C_3} , \quad L_0 = \frac{L_2^2}{L_2 + L_3 S_c^2} , \quad (2.106a,b)$$

$$\ddot{\underline{u}}_2 = \underline{u}_{a2} - \underline{u}_{b2} , \quad \omega_1^2 = \frac{K_c}{K_L} \frac{1}{L_1 C_1} , \quad (2.106c,d)$$

$$t_1 = 1 + \frac{S_a S_c}{K_L} + \frac{S_b S_d}{K_C} , \quad \underline{w}_1 = \underline{E}_{n1} + \frac{S_a}{K_L} (\underline{E}_{n1} S_c + \underline{u}_L) + \frac{S_b}{K_C} (\underline{E}_{n1} S_d + \underline{u}_c) . \quad (2.106e,f)$$

S_a, S_b, S_c, S_d sowie K_L, K_C sind durch die Gln.(2.86 a-d) bzw. (2.87), (2.88) gegeben. Die Schaltelemente L_0 und C_0 sind - wiederum den Gln.(2.87), (2.88) zufolge - positiv. Dasselbe gilt wegen $K_L, K_C > 0$ auch für ω_1^2 . Damit erfüllen alle vier Summanden von $\underline{H}$ die Bedingungen von Satz 4, d.h. die Matrix $\underline{H}$ ist als Hy-

bridmatrix eines Reaktanz-2n-Tors zu verwirklichen.

Gehen wir bei der Realisierung dieser Hybridmatrix analog zum letzten Abschnitt vor, indem wir zunächst für jeden der vier Summanden die Schaltung bestimmen, um sie anschließend zum gesuchten 2n-Tor zusammenzuschalten, so zeigt es sich, daß an Schaltelementen vier Reaktanzen und - im wesentlichen - 6n ideale Übertrager benötigt werden. Ein Vergleich mit dem Ergebnis des letzten Abschnitts legt aber die Vermutung nahe, daß auch eine Realisierung mit weniger Übertragern existieren muß. Dort wurden im wesentlichen 2n (genau $2n - 1$) Übertrager gebraucht (also das Produkt aus Grad und halber Torzahl), demnach müßte hier entsprechend die Minimalzahl an Übertragern etwa gleich 4n sein. Wir zeigen im folgenden, daß man tatsächlich eine äquivalente Schaltung mit etwa dieser Minimalzahl an Übertragern bekommt, falls man von einer Hybridmatrix ausgeht, in welcher - wie in Gl.(2.93) - entweder $\underline{H}_{11}$ oder $\underline{H}_{22}$ verschwindet¹⁾. Wir können $\underline{H}$ nach den Gln.(2.105 a-f) unter Zuhilfenahme von Satz 32 in eine derartige Form bringen²⁾. Bilden wir nämlich die Gyration von $\underline{H}$ z.B. um sein nicht verschwindendes (n+2)-tes Diagonalelement, so verschwindet in ihr wegen Satz 32 die Teilmatrix (n-2)-ter Ordnung in der rechten unteren Ecke. Vorher wird die gegebene Matrix $\underline{H}$ derart zerlegt, daß das ausgezeichnete Diagonalelement an (n+2)-ter Stelle, welches in der bisherigen Darstellung in $\underline{H}_{22}$ enthalten war, nun gesondert auftaucht. Entsprechend müssen auch die Variablenvektoren aufgeteilt werden, und zwar wie folgt:

$$\underline{i}_2 = \left[\underline{i}_2 \mid \underline{i}_3^T \right]^T, \quad \underline{v}_2 = \left[\underline{v}_2 \mid \underline{v}_3^T \right]^T. \quad (2.107a)$$

i_2, v_2 sind Skalare, $\underline{i}_3, \underline{v}_3$ sind (n-2)-Vektoren. Die Vektoren und Skalare $\underline{v}', \underline{i}', v_1, i_1$ bleiben unverändert. Damit ergibt sich aus Gl.(2.105 a) die variierte Hybridbeziehung

-
- 1) Die beiden Teilmatrizen $\underline{H}_{11}$ und $\underline{H}_{22}$ können nur in konstanten Hybridmatrizen gleichzeitig verschwinden.
 - 2) Dazu muß allerdings $n > 1$ vorausgesetzt werden.

darstellbar, in der die einzelnen Summanden die nachstehende Gestalt haben:

$$\underline{P}_0 = \frac{1}{C_0} \begin{bmatrix} \underline{u}_0 \underline{u}_0^T & \underline{u}_0 & 0 \\ \underline{u}_0^T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\underline{u}_0 = \underline{E}_{n_1} - \underline{u}_c S_d \frac{C_2}{C_3}) \quad (2.105c)$$

$$\underline{P}_\infty = L_0 \begin{bmatrix} \underline{u}_\infty \underline{u}_\infty^T & \underline{u}_\infty & 0 \\ \underline{u}_\infty^T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\underline{u}_\infty = \underline{E}_{n_1} - \underline{u}_L S_c \frac{L_2}{L_1}) \quad (2.105d)$$

$$\tilde{\underline{P}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \underline{F}_{n-1} + \underline{E}_{n_1} \underline{u}_{b2}^T - \frac{S_a}{K_L} (S_c \underline{E}_{n_1} + \underline{u}_L) \underline{\ddot{u}}_2^T \\ 0 & 0 & \underline{u}_{b2}^T - \frac{S_a S_c}{K_L} \underline{\ddot{u}}_2^T \\ -\underline{F}_{n-1}^T - \underline{u}_{b2} \underline{E}_{n_1}^T + \frac{S_a}{K_L} \underline{\ddot{u}}_2 (S_c \underline{E}_{n_1}^T + \underline{u}_L^T) & -\underline{u}_{b2} + \frac{S_a S_c}{K_L} \underline{\ddot{u}}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.105e)$$

$$\underline{P}_1 \underline{p} + \tilde{\underline{P}}_1 = \begin{bmatrix} p \frac{K_c}{C_1} \underline{w}_1 \underline{w}_1^T & p \frac{K_c t_1}{C_1} \underline{w}_1 & \omega_1^2 \underline{w}_1 \underline{\ddot{u}}_1^T \\ p \frac{K_c t_1}{C_1} \underline{w}_1^T & p \frac{K_c t_1^2}{C_1} & \omega_1^2 t_1 \underline{\ddot{u}}_1^T \\ -\omega_1^2 \underline{\ddot{u}}_1 \underline{w}_1^T & -\omega_1^2 t_1 \underline{\ddot{u}}_1 & p \frac{1}{K_L L_1} \underline{\ddot{u}}_1 \underline{\ddot{u}}_1^T \end{bmatrix} \quad (2.105f)$$

Die in den Gln.(2.105 b-f) neu eingeführten Abkürzungen bedeuten

$$C_0 = (C_3 + S_d^2 C_2) \frac{C_2}{C_3} \quad , \quad L_0 = \frac{L_2^2}{L_2 + L_3 S_c^2} \quad , \quad (2.106a,b)$$

$$\underline{\ddot{u}}_2 = \underline{u}_{a2} - \underline{u}_{b2} \quad , \quad \omega_1^2 = \frac{K_c}{K_L} \frac{1}{L_1 C_1} \quad , \quad (2.106c,d)$$

$$t_1 = 1 + \frac{S_a S_c}{K_L} + \frac{S_b S_d}{K_c} \quad , \quad \underline{w}_1 = \underline{E}_{n_1} + \frac{S_a}{K_L} (\underline{E}_{n_1} S_c + \underline{u}_L) + \frac{S_b}{K_c} (\underline{E}_{n_1} S_d + \underline{u}_c) \quad (2.106e,f)$$

S_a, S_b, S_c, S_d sowie K_L, K_c sind durch die Gln.(2.86 a-d) bzw. (2.87), (2.88) gegeben. Die Schaltelemente L_0 und C_0 sind - wiederum den Gln.(2.87), (2.88) zufolge - positiv. Dasselbe gilt wegen $K_L, K_c > 0$ auch für ω_1^2 . Damit erfüllen alle vier Summanden von $\underline{H}$ die Bedingungen von Satz 4, d.h. die Matrix $\underline{H}$ ist als Hy-

bridmatrix eines Reaktanz- $2n$ -Tors zu verwirklichen.

Gehen wir bei der Realisierung dieser Hybridmatrix analog zum letzten Abschnitt vor, indem wir zunächst für jeden der vier Summanden die Schaltung bestimmen, um sie anschließend zum gesuchten $2n$ -Tor zusammenzuschalten, so zeigt es sich, daß an Schaltelementen vier Reaktanzen und - im wesentlichen - $6n$ ideale Übertrager benötigt werden. Ein Vergleich mit dem Ergebnis des letzten Abschnitts legt aber die Vermutung nahe, daß auch eine Realisierung mit weniger Übertragern existieren muß. Dort wurden im wesentlichen $2n$ (genau $2n - 1$) Übertrager gebraucht (also das Produkt aus Grad und halber Torzahl), demnach müßte hier entsprechend die Minimalzahl an Übertragern etwa gleich $4n$ sein. Wir zeigen im folgenden, daß man tatsächlich eine äquivalente Schaltung mit etwa dieser Minimalzahl an Übertragern bekommt, falls man von einer Hybridmatrix ausgeht, in welcher - wie in Gl.(2.93) - entweder $\underline{H}_{11}$ oder $\underline{H}_{22}$ verschwindet¹⁾. Wir können $\underline{H}$ nach den Gln.(2.105 a-f) unter Zuhilfenahme von Satz 32 in eine derartige Form bringen²⁾. Bilden wir nämlich die Gyration von $\underline{H}$ z.B. um sein nicht verschwindendes $(n+2)$ -tes Diagonalelement, so verschwindet in ihr wegen Satz 32 die Teilmatrix $(n-2)$ -ter Ordnung in der rechten unteren Ecke. Vorher wird die gegebene Matrix $\underline{H}$ derart zerlegt, daß das ausgezeichnete Diagonalelement an $(n+2)$ -ter Stelle, welches in der bisherigen Darstellung in $\underline{H}_{22}$ enthalten war, nun gesondert auftaucht. Entsprechend müssen auch die Variablenvektoren aufgeteilt werden, und zwar wie folgt:

$$\underline{i}_2 = \begin{bmatrix} i_2 & \underline{i}_3^T \end{bmatrix}^T, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} v_2 & \underline{v}_3^T \end{bmatrix}^T. \quad (2.107a)$$

i_2, v_2 sind Skalare, $\underline{i}_3, \underline{v}_3$ sind $(n-2)$ -Vektoren. Die Vektoren und Skalare $\underline{v}', \underline{i}', v_1, i_1$ bleiben unverändert. Damit ergibt sich aus Gl.(2.105 a) die variierte Hybridbeziehung

-
- 1) Die beiden Teilmatrizen $\underline{H}_{11}$ und $\underline{H}_{22}$ können nur in konstanten Hybridmatrizen gleichzeitig verschwinden.
 - 2) Dazu muß allerdings $n > 1$ vorausgesetzt werden.

$$\begin{bmatrix} \underline{v}' \\ \underline{v}_1 \\ \underline{i}_2 \\ \underline{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{n}{\underline{H}_{11}} & \overset{n}{\underline{H}_{11,1}} & \overset{n}{\underline{H}_{12,2}} & \overset{n}{\underline{H}_{12,3}} \\ \underline{H}_{11,1}^T & h_{11} & h_{12,12} & \underline{H}_{12,13} \\ -\underline{H}_{12,2}^T & -h_{12,12} & h_{22} & \underline{H}_{22,23} \\ -\underline{H}_{12,3}^T & -\underline{H}_{12,13}^T & \underline{H}_{22,23}^T & \underline{H}_{22,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}' \\ \underline{i}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \end{bmatrix} \quad (2.108 a)$$

Von der Partitionierung sind außer den Vektoren $\underline{i}_2$, $\underline{v}_2$ noch verschiedene Vektoren und Matrizen in $\underline{H}$ bzw. in dessen Summanden betroffen. Sie werden daher entsprechend zu Gl.(2.107 a) dargestellt:

$$\underline{u}_{b2} = [\underline{u}_{b2} \mid \overset{n}{\underline{u}_{b3}^T}]^T, \quad \underline{\ddot{u}}_2 = [\underline{\ddot{u}}_2 \mid \overset{n}{\underline{\ddot{u}}_3^T}]^T, \quad (2.107 b)$$

$$\underline{F}_{n,n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \underline{1}_{n-2} \end{bmatrix} = [\underline{G}_{n1} \mid \overset{n-1}{\underline{F}_{n,n-2}}] \quad (2.107 c)$$

In Gl.(2.107 c) gehört $\underline{F}_{n,n-2}$ zu dem in Gl.(1.67 b) definierten Matrixtyp. Der Vektor $\underline{G}_{n1}$ wurde in Gl.(2.58 b) definiert. Damit lassen sich die durch die Partitionierung neu entstandenen Teilmatrizen in Gl.(2.108 a) mit Hilfe der Gln.(2.105 b-f), (2.107 b,c) wie folgt ausdrücken:

$$h_{22} = \frac{\ddot{u}_2^2}{K_L L_1} \frac{p}{p^2 + \omega_i^2}, \quad (2.108 b)$$

$$\underline{H}_{22,23} = \frac{\ddot{u}_2}{K_L L_1} \frac{p}{p^2 + \omega_i^2} \underline{\ddot{u}}_3^T, \quad (2.108 c)$$

$$\underline{H}_{22,3} = \frac{1}{K_L L_1} \frac{p}{p^2 + \omega_i^2} \underline{\ddot{u}}_3 \underline{\ddot{u}}_3^T, \quad (2.108 d)$$

$$\underline{H}_{12,2} = \frac{\omega_i^2 \ddot{u}_2}{p^2 + \omega_i^2} \underline{w}_1 + \underline{G}_{n1} + \underline{u}_{b3} \underline{E}_{n1} - \frac{S_a \ddot{u}_2}{K_L} (S_c \underline{E}_{n1} + \underline{u}_L), \quad (2.108 e)$$

$$\underline{H}_{12,3} = \frac{\omega_i^2}{p^2 + \omega_i^2} \underline{w}_1 \underline{\ddot{u}}_3^T + \underline{F}_{n,n-2} + \underline{E}_{n1} \underline{u}_{b3}^T - \frac{S_a}{K_L} (S_c \underline{E}_{n1} + \underline{u}_L) \underline{\ddot{u}}_3^T, \quad (2.108 f)$$

$$h_{12,12} = \frac{\omega_i^2 t_1 \ddot{u}_2}{p^2 + \omega_i^2} + \underline{u}_{b2} - \frac{S_a S_c \ddot{u}_2}{K_L}, \quad (2.108 g)$$

$$\underline{H}_{12,13} = \frac{\omega_i^2 t_1}{p^2 + \omega_i^2} \underline{\ddot{u}}_3^T + \underline{u}_{b3}^T - \frac{S_a S_c}{K_L} \underline{\ddot{u}}_3^T. \quad (2.108 h)$$

Nach Gl.(1.56) bilden wir die mit $\Gamma_{n+2}(\underline{H})$ bezeichnete Gyration von $\underline{H}$ nach Gl.(2.108 a) um sein $(n+2)$ -tes Diagonalelement h_{22} ,

wobei selbstverständlich $h_{22} \neq 0$ vorausgesetzt wird:

$$\Gamma_{n+2}(\underline{H}) = \begin{bmatrix} \underline{H}_{12,2} \\ h_{12,12} \\ 1 \\ \underline{H}_{22,23}^T \end{bmatrix}^n \frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} \underline{H}_{12,2}^T & h_{12,12} & 1 & -\underline{H}_{22,23} \end{bmatrix}^{n-1} + \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{11,1} & 0 & \underline{H}_{12,13} \\ \underline{H}_{11,1}^T & h_{11} & 0 & \underline{H}_{12,13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\underline{H}_{12,13}^T & -\underline{H}_{12,13} & 0 & \underline{H}_{22,23} \end{bmatrix}^{n-2} \quad (2.109a)$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} + \frac{\underline{H}_{12,2} \underline{H}_{12,2}^T}{h_{22}} & \underline{H}_{11,1} + \frac{h_{12,12} \underline{H}_{12,2}}{h_{22}} & \frac{\underline{H}_{12,2}}{h_{22}} & \underline{H}_{12,13} - \frac{\underline{H}_{12,2} \underline{H}_{22,23}}{h_{22}} \\ \underline{H}_{11,1}^T + \frac{h_{12,12} \underline{H}_{12,2}^T}{h_{22}} & h_{11} + \frac{h_{12,12}^2}{h_{22}} & \frac{h_{12,12}}{h_{22}} & \underline{H}_{12,13} - \frac{\underline{H}_{22,23} h_{12,12}}{h_{22}} \\ \frac{\underline{H}_{12,2}^T}{h_{22}} & \frac{h_{12,12}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} & -\frac{\underline{H}_{22,23}}{h_{22}} \\ -\underline{H}_{12,13}^T + \frac{\underline{H}_{22,23} \underline{H}_{12,2}^T}{h_{22}} & -\underline{H}_{12,13} + \frac{h_{12,12} \underline{H}_{22,23}}{h_{22}} & \frac{\underline{H}_{22,23}}{h_{22}} & \underline{H}_{22,23} - \frac{\underline{H}_{22,23} \underline{H}_{22,23}}{h_{22}} \end{bmatrix}$$

Mit der Bezeichnung $\underline{H}^{(g)} = \Gamma_{n+2}(\underline{H})$ lauten die zugehörigen Hybridbeziehungen explizit:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_1^T & \underline{V}_2 & \underline{I}_3^T \end{bmatrix}^T = \underline{H}^{(g)} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^T & \underline{I}_2 & \underline{V}_3^T \end{bmatrix}^T \quad (2.109b)$$

Die Berechnung der Teilmatrizen von $\underline{H}^{(g)}$ mit Hilfe der Gln. (2.105 a-f), (2.108 a-h) ergibt im einzelnen

$$\begin{aligned} \underline{H}_{11} + \frac{\underline{H}_{12,2} \underline{H}_{12,2}^T}{h_{22}} &= \frac{K_c}{p C_1} \left\{ \frac{G_{n1}}{\underline{U}_2} + \frac{u_{a1}}{\underline{U}_2} E_{n1} + \frac{S_b}{K_c} (S_d E_{n1} + \underline{u}_c) \right\} \left\{ \frac{G_{n1}^T}{\underline{U}_2} + \frac{u_{a1}}{\underline{U}_2} E_{n1}^T + \frac{S_b}{K_c} (S_d E_{n1} + \underline{u}_c) \right\} + \\ &+ K_L p L_1 \left\{ \frac{G_{n1}}{\underline{U}_2} + \frac{u_{b2}}{\underline{U}_2} E_{n1} - \frac{S_a}{K_L} (S_c E_{n1} + \underline{u}_L) \right\} \left\{ \frac{G_{n1}^T}{\underline{U}_2} + \frac{u_{b2}}{\underline{U}_2} E_{n1}^T - \frac{S_a}{K_L} (S_c E_{n1} + \underline{u}_L) \right\} + \\ &+ p L_0 (E_{n1} - S_c \frac{L_1}{L_2} \underline{u}_L) (E_{n1}^T - S_c \frac{L_1}{L_2} \underline{u}_L^T) + \\ &+ \frac{1}{p C_0} (E_{n1} - S_d \frac{C_2}{C_3} \underline{u}_c) (E_{n1}^T - S_d \frac{C_2}{C_3} \underline{u}_c^T) , \quad (2.109c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{H}_{11,1} + \frac{h_{12,12} \underline{H}_{12,2}}{h_{22}} &= \frac{K_c}{p C_1} \left(\frac{u_{a1}}{\underline{U}_2} + \frac{S_b S_d}{K_c} \right) \left\{ \frac{G_{n1}}{\underline{U}_2} + \frac{u_{a1}}{\underline{U}_2} E_{n1} + \frac{S_b}{K_c} (S_d E_{n1} + \underline{u}_c) \right\} + \\ &+ K_L p L_1 \left(\frac{u_{b2}}{\underline{U}_2} - \frac{S_a S_c}{K_L} \right) \left\{ \frac{G_{n1}}{\underline{U}_2} + \frac{u_{b2}}{\underline{U}_2} E_{n1} - \frac{S_a}{K_L} (S_c E_{n1} + \underline{u}_L) \right\} + \\ &+ p L_0 (E_{n1} - S_c \frac{L_1}{L_2} \underline{u}_L) + \frac{1}{p C_0} (E_{n1} - S_d \frac{C_2}{C_3} \underline{u}_c) , \quad (2.109d) \end{aligned}$$

$$\frac{H_{12,2}}{h_{22}} = \frac{K_C}{\underline{u}_2 p C_1} \left\{ \frac{G_{n1}}{\underline{u}_2} + \frac{u_{a2}}{\underline{u}_2} E_{n1} + \frac{S_b}{K_C} (S_d E_{n1} + \underline{u}_c) \right\} + \\ + \frac{1}{\underline{u}_2} K_L p L_1 \left\{ \frac{G_{n1}}{\underline{u}_2} + \frac{u_{b2}}{\underline{u}_2} E_{n1} - \frac{S_a}{K_L} (S_c E_{n1} + \underline{u}_l) \right\}, \quad (2.109 e)$$

$$H_{22} - \frac{H_{12,2} H_{22,23}}{h_{22}} = F_{n,n-2} - G_{n1} \frac{u_{a3}^T - u_{b3}^T}{u_{a2} - u_{b2}} + E_{n1} \frac{u_{a2} u_{b3}^T - u_{b2} u_{a3}^T}{u_{a2} - u_{b2}}, \quad (2.109 f)$$

$$h_{11} + \frac{h_{12,12}}{h_{22}} = \frac{K_C}{p C_1} \left(\frac{u_{a2}}{\underline{u}_2} + \frac{S_b S_d}{K_C} \right)^2 + K_L p L_1 \left(\frac{u_{b2}}{\underline{u}_2} - \frac{S_a S_c}{K_L} \right)^2 + p L_0 + \frac{1}{p C_0}, \quad (2.109 g)$$

$$\frac{h_{12,12}}{h_{22}} = \frac{K_C}{\underline{u}_2 p C_1} \left(\frac{u_{a2}}{\underline{u}_2} + \frac{S_b S_d}{K_C} \right) + \frac{1}{\underline{u}_2} K_L p L_1 \left(\frac{u_{b2}}{\underline{u}_2} - \frac{S_a S_c}{K_L} \right), \quad (2.109 h)$$

$$\underline{H}_{12,12} - \frac{h_{12,12} H_{22,23}}{h_{22}} = \frac{u_{a2} u_{b3}^T - u_{b2} u_{a3}^T}{u_{a2} - u_{b2}}, \quad (2.109 i)$$

$$\frac{1}{h_{22}} = \frac{1}{\underline{u}_2^2} \left(\frac{K_C}{p C_1} + K_L p L_1 \right), \quad (2.109 j)$$

$$-\frac{H_{22,23}}{h_{22}} = \frac{u_{b3}^T - u_{a3}^T}{u_{a2} - u_{b2}}, \quad (2.109 k)$$

$$H_{22,23} - \frac{H_{22,33}^T H_{22,23}}{h_{22}} = 0. \quad (2.109 l)$$

Die Hybridmatrix $\underline{H}^{(g)}$ wird - nach dem Vorbild von $\underline{H}$ in Abschn. II.2.4.1. - als Reihenparallelschaltung (Satz 17) derjenigen Teilnetzwerke realisiert, die zu den Summanden der Partialbruchzerlegung nach Gl.(1.29) für $\underline{H}^{(g)}$ gehören. Diese besitzt den Gln.(2.109 c-l) zufolge in diesem Fall nur drei Glieder, nämlich $\underline{P}_0/p$, $\underline{P}_\infty p$ und $\underline{\tilde{P}}_s$. In der folgenden Darstellung von $\underline{H}^{(g)}$ durch diese Summe sind aus Zweckmäßigkeitsgründen $\underline{P}_0/p$ und $\underline{P}_\infty p$ in je zwei Matrizen vom Rang 1 zerlegt worden. Von diesen insgesamt vier Matrizen enthalten wiederum zwei Teile von $\underline{\tilde{P}}_s$. Die in diesem Sinne abgewandelte Partialbruchzerlegung lautet

$$\underline{H}^{(g)} = \underline{H}_0^{(1)} + \underline{H}_0^{(2)} + \underline{H}_\infty^{(1)} + \underline{H}_\infty^{(2)} + \underline{H}_s. \quad (2.110 a)$$

Die fünf Summanden von $\underline{H}^{(g)}$ nach dieser Darstellung bedeuten:

8-2

$\frac{K_c}{pC_1} \left\{ \frac{G_{n1}}{\bar{u}_2} + \frac{u_{a2}}{\bar{u}_2} \bar{E}_{n1} + \frac{S_b}{K_c} (S_d \bar{E}_{n1} + \bar{u}_c) \right\}^2$ $\times \left\{ \frac{G_{n1}}{\bar{u}_2} + \frac{u_{a2}}{\bar{u}_2} \bar{E}_{n1} + \frac{S_b}{K_c} (S_d \bar{E}_{n1} + \bar{u}_c) \right\} \dots + \frac{u_{a2}}{\bar{u}_2} \bar{E}_{n1} + \frac{S_b}{K_c} (S_d \bar{E}_{n1} + \bar{u}_c) \dots$	$\frac{K_c}{pC_1} \left\{ \frac{G_{n1}}{\bar{u}_2} + \frac{S_b S_d}{K_c} \right\} \left\{ \frac{G_{n1}}{\bar{u}_2} + \frac{u_{a2}}{\bar{u}_2} \bar{E}_{n1} + \dots \right\}$ $\dots + \frac{S_b}{K_c} (S_d \bar{E}_{n1} + \bar{u}_c) \dots$	$\left(\frac{G_{n1}}{\bar{u}_2} + \frac{u_{a2}}{\bar{u}_2} \bar{E}_{n1} + \frac{S_b S_d}{K_c} \right)^2$
$\frac{K_c}{pC_1} \left\{ \frac{u_{a2}}{\bar{u}_2} + \frac{S_b S_d}{K_c} \right\} \left\{ \frac{G_{n1}}{\bar{u}_2} + \frac{u_{a2}}{\bar{u}_2} \bar{E}_{n1} + \dots \right\}$ $\dots + \frac{S_b}{K_c} (S_d \bar{E}_{n1} + \bar{u}_c) \dots$	$\frac{K_c}{\bar{u}_2 pC_1} \left(\frac{u_{a2}}{\bar{u}_2} + \frac{S_b S_d}{K_c} \right)$	$\frac{1}{\bar{u}_2} \bar{u}_{b3}$
$-\bar{u}_{b3} \left(\frac{G_{n1}}{\bar{u}_2} + \frac{u_{a2}}{\bar{u}_2} \bar{E}_{n1} \right)$	$-\frac{u_{a2}}{\bar{u}_2} \bar{u}_{b3}$	0

$H_0^{(2)} =$

(2.110 b)

$$\begin{aligned}
 H_{\infty}^{(2)} = & \left[\begin{aligned}
 & K_L p_{L1} \left\{ \frac{\bar{G}_{m1}}{\bar{U}_2} + \frac{\bar{U}_{b2}}{\bar{U}_2} \bar{E}_{m1} - \frac{S_a}{K_L} (S_c \bar{E}_{m1} + \bar{U}_L) \right\} \times K_L p_{L1} \left(\frac{\bar{U}_{b2}}{\bar{U}_2} - \frac{S_a S_c}{K_L} \right) \left\{ \frac{\bar{G}_{m1}}{\bar{U}_2} + \dots \right. \\
 & \quad \times \left. \left(\frac{\bar{G}_{m1}^T}{\bar{U}_2} + \frac{\bar{U}_{b2}}{\bar{U}_2} \bar{E}_{m1} - \frac{S_a}{K_L} (S_c \bar{E}_{m1} + \bar{U}_L) \right) \right\} \dots - \frac{S_a}{K_L} (S_c \bar{E}_{m1} + \bar{U}_L) \left. \right\} \\
 & \quad - \left(\frac{\bar{G}_{m1}}{\bar{U}_2} + \frac{\bar{U}_{b2}}{\bar{U}_2} \bar{E}_{m1} \right) \bar{U}_{a3} \\
 & K_L p_{L1} \left(\frac{\bar{U}_{b2}}{\bar{U}_2} - \frac{S_a S_c}{K_L} \right) \left\{ \frac{\bar{G}_{m1}^T}{\bar{U}_2} + \frac{\bar{U}_{b2}}{\bar{U}_2} \bar{E}_{m1} - \dots \right. \\
 & \quad \left. \dots - \frac{S_a}{K_L} (S_c \bar{E}_{m1} + \bar{U}_L) \right\} \\
 & \quad - \frac{\bar{U}_{b2}}{\bar{U}_2} \bar{U}_{a3} \\
 & \frac{K_L p_{L1}}{\bar{U}_2} \left\{ \frac{\bar{G}_{m1}^T}{\bar{U}_2} + \frac{\bar{U}_{b2}}{\bar{U}_2} \bar{E}_{m1} - \frac{S_a}{K_L} (S_c \bar{E}_{m1} + \bar{U}_L) \right\} \\
 & \quad - \frac{1}{\bar{U}_2} \bar{U}_{a3} \\
 & \frac{\bar{U}_{a3}}{\bar{U}_2} \left(\frac{\bar{G}_{m1}^T}{\bar{U}_2} + \frac{\bar{U}_{b2}}{\bar{U}_2} \bar{E}_{m1} \right) \\
 & \quad 0
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

(2.110c)

$$\underline{H}_0^{(n)} = \frac{1}{pC_0} \begin{bmatrix} \underline{u}_0 \underline{u}_0^T & \underline{u}_0 & 0 & 0 \\ \underline{u}_0^T & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\underline{u}_0 = \underline{E}_m - S_d \frac{C_2}{C_3} \underline{u}_c) \quad , \quad (2.110 d)$$

$$\underline{H}_\infty^{(n)} = pL_0 \begin{bmatrix} \underline{u}_\infty \underline{u}_\infty^T & \underline{u}_\infty & 0 & 0 \\ \underline{u}_\infty^T & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\underline{u}_\infty = \underline{E}_m - S_c \frac{L_3}{L_2} \underline{u}_L) \quad , \quad (2.110 e)$$

$$\underline{H}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & F_{n,n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -F_{n,n-2}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (2.110 f)$$

Bei der schaltungsmäßigen Realisierung gehen wir wie an der entsprechenden Stelle des letzten Abschnitts vor, d.h. wir benutzen im wesentlichen den Satz 29 aus Teil I. Der Übersichtlichkeit wegen vollziehen wir die Kongruenztransformation der Matrizen $\underline{H}_0^{(1)}$, $\underline{H}_0^{(2)}$, $\underline{H}_\infty^{(1)}$, $\underline{H}_\infty^{(2)}$ in zwei Schritten.

Zunächst betrachten wir die Matrizen $\underline{H}_0^{(1)}$ und $\underline{H}_0^{(2)}$. Es zeigt sich, daß für beide sowohl beim ersten als auch beim zweiten Umformungsschritt jeweils die gleiche Transformationsmatrix verwendet werden kann.

1. Schritt:

$$\underline{I}_{01} = \begin{bmatrix} \overset{n+1}{\underline{I}_{01,a}} & \overset{n-1}{0} \\ 0 & \underline{1}_{n-2} \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{I}_{01,a} = \begin{bmatrix} \underline{1}_n & 0 & 0 \\ -\underline{E}_m^T & 1 & 0 \\ -\underline{G}_m^T & -u_{a2} & \frac{S_b S_d \underline{u}_2}{K_c} \end{bmatrix} \quad (2.111 a)$$

Transformation von $\underline{H}_0^{(1)}$ und $\underline{H}_0^{(2)}$ nach den Gln. (2.110 b,c) mit $\underline{I}_{01}$:

$$\underline{H}_{01}^{(1)} = \underline{I}_{01}^T \underline{H}_0^{(1)} \underline{I}_{01} = \frac{1}{pC_0} \begin{bmatrix} (S_d \frac{C_2}{C_3})^2 \underline{u}_c \underline{u}_c^T & -S_d \frac{C_2}{C_3} \underline{u}_c & 0 & 0 \\ -S_d \frac{C_2}{C_3} \underline{u}_c^T & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.111 b)$$

$$\underline{H}_{01}^{(1)} = \underline{I}_{01}^T \underline{H}_0^{(2)} \underline{I}_{01} = \frac{1}{K_c} \begin{bmatrix} \frac{S_b^2}{pC_1} \underline{u_c} \underline{u_c}^T & \frac{S_b^2 S_d}{pC_1} \underline{u_c} & \frac{S_b^2 S_d}{pC_1} \underline{u_c} & 0 \\ \frac{S_b^2 S_d}{pC_1} \underline{u_c}^T & \frac{(S_b S_d)^2}{pC_1} & \frac{(S_b S_d)^2}{pC_1} & 0 \\ \frac{S_b^2 S_d}{pC_1} \underline{u_c}^T & \frac{(S_b S_d)^2}{pC_1} & \frac{(S_b S_d)^2}{pC_1} & S_b S_d \underline{u_{b3}}^T \\ 0 & 0 & -S_b S_d \underline{u_{b3}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.111c)$$

2. Schritt:

$$\underline{I}_{02} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{02,a} & 0 \\ 0 & \underline{I}_{n-2} \end{bmatrix}, \quad \underline{I}_{02,a} = \begin{bmatrix} \underline{1}_n - \underline{E}_{n1} \underline{u_c}^T \underline{E}_{n,n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.112a)$$

$$\underline{u_c} = \underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{u_{c2}}.$$

Transformation von $\underline{H}_{01}^{(1)}$ und $\underline{H}_{01}^{(2)}$ mit $\underline{I}_{02}$:

$$\underline{H}_{02}^{(1)} = \underline{I}_{02}^T \underline{H}_{01}^{(1)} \underline{I}_{02} = \frac{1}{pC_0} \begin{bmatrix} (S_d \frac{C_1}{C_3})^2 \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T & -S_d \frac{C_1}{C_3} \underline{E}_{n1} & 0 & 0 \\ -S_d \frac{C_1}{C_3} \underline{E}_{n1}^T & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.112b)$$

$$\underline{H}_{02}^{(2)} = \underline{I}_{02}^T \underline{H}_{01}^{(2)} \underline{I}_{02} = \frac{1}{K_c} \begin{bmatrix} \frac{S_b^2}{pC_1} \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T & \frac{S_b^2 S_d}{pC_1} \underline{E}_{n1} & \frac{S_b^2 S_d}{pC_1} \underline{E}_{n1} & 0 \\ \frac{S_b^2 S_d}{pC_1} \underline{E}_{n1}^T & \frac{(S_b S_d)^2}{pC_1} & \frac{(S_b S_d)^2}{pC_1} & 0 \\ \frac{S_b^2 S_d}{pC_1} \underline{E}_{n1}^T & \frac{(S_b S_d)^2}{pC_1} & \frac{(S_b S_d)^2}{pC_1} & S_b S_d \underline{u_{b3}}^T \\ 0 & 0 & -S_b S_d \underline{u_{b3}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.112c)$$

Führt man entsprechend Satz 29 die zu $\underline{H}_{01}^{(1)}$ und $\underline{H}_{01}^{(2)}$ bzw. zu $\underline{H}_{02}^{(1)}$ und $\underline{H}_{02}^{(2)}$ gehörigen, transformierten Variablenvektoren

$$[\underline{V}_1^T \mid \underline{V}_{11} \mid \underline{V}_{21} \mid \underline{I}_{31}^T]^T, \quad [\underline{I}_1^T \mid i_{11} \mid i_{21} \mid \underline{V}_{31}^T]^T$$

beziehungsweise

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_2'^T & \underline{V}_{12} & \underline{V}_{22} & \underline{I}_{32}^T \end{bmatrix}^T, \quad \begin{bmatrix} \underline{I}_2'^T & \underline{I}_{12} & \underline{I}_{22} & \underline{V}_{32}^T \end{bmatrix}^T$$

ein, so sind diese folgendermaßen miteinander verknüpft:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}' \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{1}_n & 0 & 0 \\ -\underline{E}_{n1}^T & 1 & 0 \\ -\underline{G}_{n1}^T & -\underline{u}_{a1} & \frac{\underline{S}_b \underline{S}_d \underline{U}_2}{\underline{K}_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}_n \\ \underline{I}_{21} \end{bmatrix}, \quad (2.111d)$$

$$\underline{V}_3 = \underline{V}_{31}, \quad (2.111e)$$

$$\underline{I}'_1 = (\underline{1}_n - \underline{E}_{n1} \underline{U}_{c2}^T \underline{F}_{n,n-1}) \underline{I}'_2, \quad (2.112d)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{11} & \underline{I}_{21} & \underline{V}_{31}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \underline{I}_{12} & \underline{I}_{22} & \underline{V}_{32}^T \end{bmatrix}^T. \quad (2.112e)$$

Wir zerlegen nun noch $\underline{H}_{02}^{(2)}$ nach Gl.(2.112 c) in die zwei Summanden

$$\begin{aligned} \underline{H}_{02}^{(2)} &= \frac{\underline{S}_b^2}{\underline{K}_c p \underline{C}_1} \begin{bmatrix} \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T & \underline{S}_d \underline{E}_{n1} & \underline{S}_d \underline{E}_{n1} & 0 \\ \underline{S}_d \underline{E}_{n1}^T & \underline{S}_d^2 & \underline{S}_d^2 & 0 \\ \underline{S}_d \underline{E}_{n1}^T & \underline{S}_d^2 & \underline{S}_d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\underline{S}_b \underline{S}_d}{\underline{K}_c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{U}_{b3}^T \\ 0 & 0 & -\underline{U}_{b3} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \underline{H}_{02}^{(21)} + \underline{H}_{02}^{(22)} \end{aligned}$$

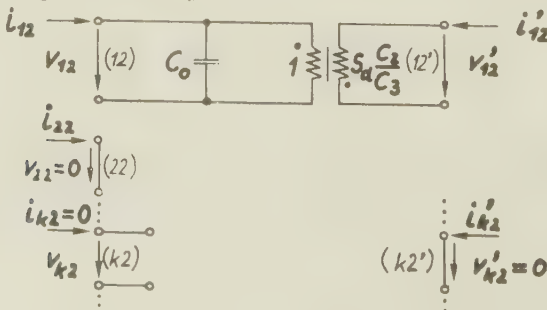
und realisieren zunächst die drei Matrizen $\underline{H}_{02}^{(1)}$, $\underline{H}_{02}^{(21)}$ und $\underline{H}_{02}^{(22)}$ mit Hilfe der zugehörigen Hybridgleichungen.

$$\underline{H}_{02}^{(1)}: \underline{V}_{12}' = \underline{S}_d \frac{\underline{C}_2}{\underline{C}_3} \frac{1}{p \underline{C}_0} (\underline{S}_d \frac{\underline{C}_2}{\underline{C}_3} \underline{I}_{12}' - \underline{I}_{12}),$$

$$\underline{V}_{12} = -\frac{1}{p \underline{C}_0} (\underline{S}_d \frac{\underline{C}_2}{\underline{C}_3} \underline{I}_{12}' - \underline{I}_{12}) = -\frac{\underline{C}_3}{\underline{C}_2 \underline{S}_d} \underline{V}_{12}',$$

$$\underline{V}_{22}' = 0, \quad \underline{V}_{22} = 0, \quad \underline{I}_{32} = 0.$$

Zugehörige Schaltung:



$$k2=3, \dots, n;$$

$$k2'=2, \dots, n.$$

Bild 32

$$\underline{H}_{02}^{(21)}: \underline{v}_{12}' = \frac{1}{S_d p C_K} \left(\frac{\underline{i}_{12}'}{S_d} + i_{12} + i_{22} \right) \quad (C_K = \frac{K_c}{(S_b S_d)^2} C_1 > 0),$$

$$\underline{v}_{12} = \frac{1}{p C_K} \left(\frac{\underline{i}_{12}'}{S_d} + i_{12} + i_{22} \right),$$

$$\underline{v}_{22} = \underline{v}_{12}, \quad \underline{v}_{22}' = 0, \quad \underline{i}_{32} = 0.$$

Zugehörige Schaltung:

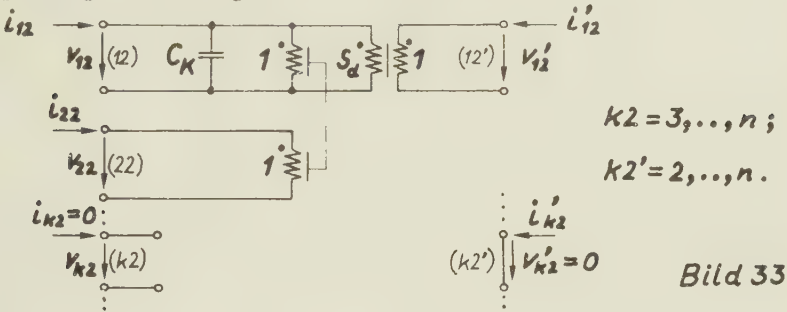


Bild 33

$$\underline{H}_{02}^{(22)}: \underline{v}_{22} = \frac{S_b S_d}{K_c} \underline{u}_{b3}^T \underline{y}_{32} = \frac{S_b S_d}{K_c} \sum_{k=3}^n u_{bk} v_{k2},$$

$$(\text{oder wahlweise } \underline{i}_{32} = -\underline{u}_{b3} \underline{i}_{22} \frac{S_b S_d}{K_c})$$

$$\underline{v}_2' = 0, \quad \underline{v}_{k2} = 0.$$

Zugehörige Schaltung:

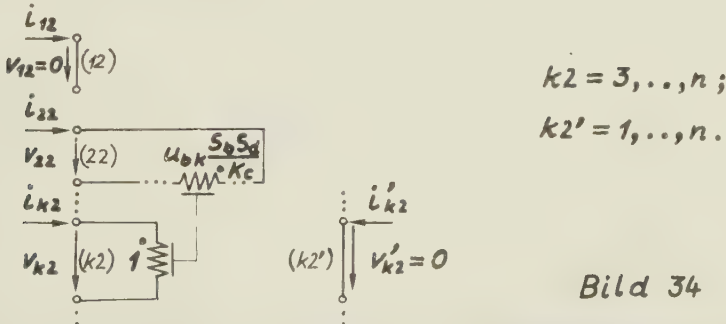
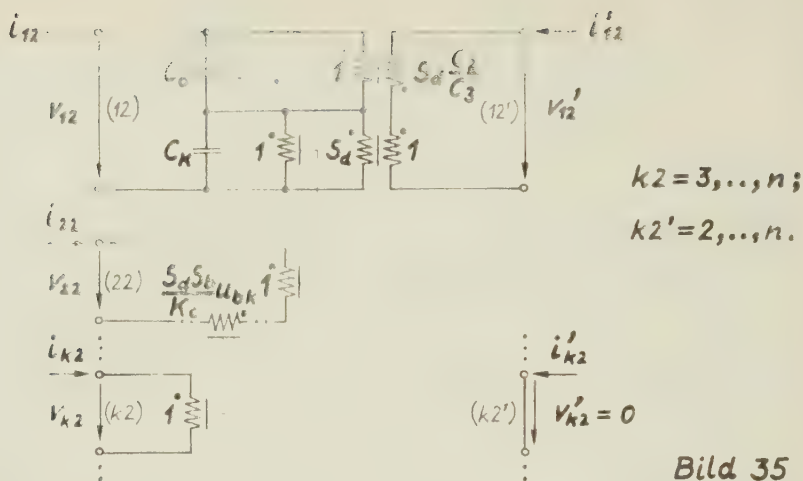


Bild 34

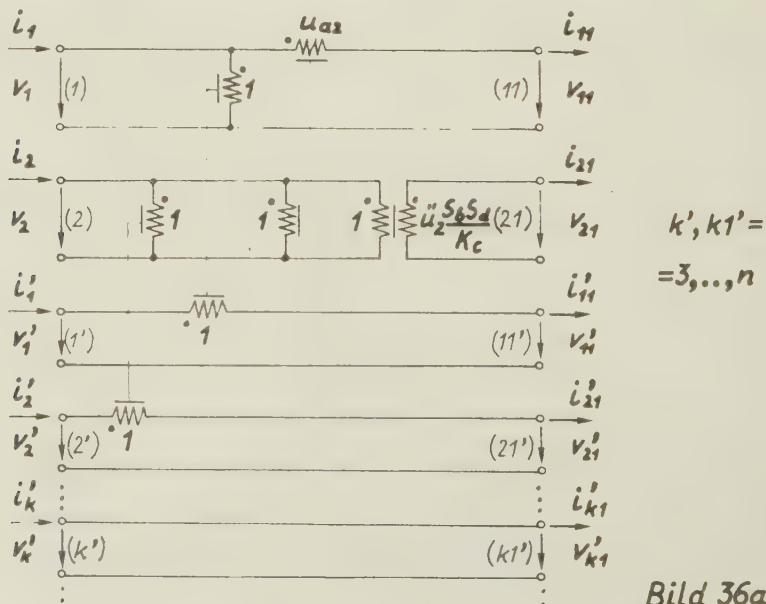
Aus den drei gewonnenen Schaltungen erhält man mit Hilfe von Satz 17 die in Bild 35 veranschaulichte Schaltung der Summe $\underline{H}_{02}^{(1)} + \underline{H}_{02}^{(21)} + \underline{H}_{02}^{(22)}$.

Anschließend bestimmen wir nun die durch die Gln. (2.111 d,e), (2.112 d,e) beschriebenen Übertragernetzwerke. Die Komponentenform der Beziehung (2.111 d) lautet



$$\begin{aligned} i_k' &= i_{k1}' \quad (k = 1, \dots, n) , \\ i_1 &= -i_{11}' + i_{11} , \\ i_2 &= -i_{21}' - u_{a2} i_{11} + \frac{S_d S_d \ddot{u}_2}{K_c} i_{21} . \end{aligned}$$

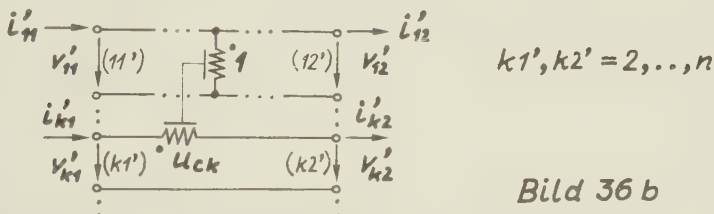
Zugehörige Schaltung:



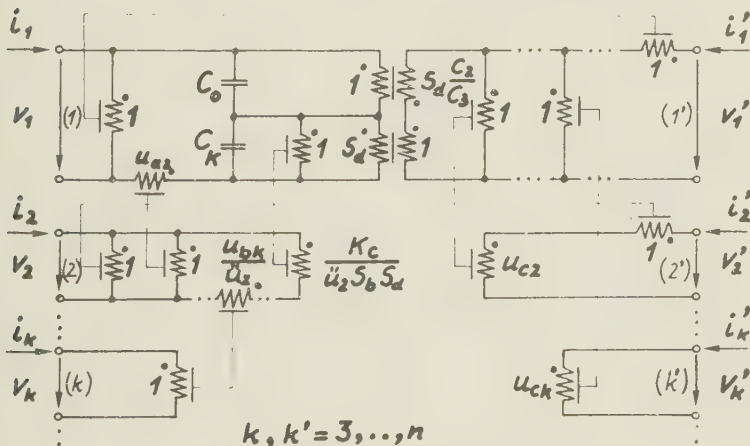
Die Komponentenform der Gl.(2.112 d) lautet

$$\begin{aligned} i'_n &= i'_{12} - \sum_{k=2}^n u_{ck} i'_{k2} , \\ i'_{k1} &= i'_{k2} \quad k=2, \dots, n . \end{aligned}$$

Zugehörige Schaltung:



Berücksichtigt man nun noch, daß den Gln.(2.111 e) bzw. (2.112 e) elektrisch gesehen die galvanische Verbindung zwischen den Toren (k) und (k1) ($k, k1 = 3, \dots, n$) bzw. zwischen den Toren (k1) und (k2) ($k1, k2 = 1, \dots, n$) entspricht, so hat die Realisierung der Teilsumme $\underline{H}_0^{(1)} + \underline{H}_0^{(2)}$ von $\underline{H}^{(g)}$ folgendes Aussehen:



Die Realisierung der beiden nächsten Terme in Gl.(2.110 a), $\underline{H}_\infty^{(1)}$ und $\underline{H}_\infty^{(2)}$, gestaltet sich nun sehr einfach. Diese beiden Matrizen weisen nämlich eine sehr augenfällige Ähnlichkeit mit den soeben realisierten Matrizen $\underline{H}_0^{(1)}$ bzw. $\underline{H}_0^{(2)}$ auf. Dies wirkt sich so aus, daß die mit 0 indizierten Matrizen bei einer Rei-

he von Substitutionen in diejenigen mit dem Index ∞ übergehen, und umgekehrt. Um welche Substitutionen es sich handelt, kann man durch Vergleich von Gl.(2.110 b) mit Gl.(2.110 c) und von Gl.(2.110 d) mit Gl.(2.110 e) feststellen. Im einzelnen gibt darüber die folgende Zuordnungstabelle Auskunft:

$\underline{H}_0^{(1),(2)}$	$1/(pC_0)$	$1/(pC_1)$	S_b	S_d	K_C	C_2/C_3	$\underline{u}_C$	u_{a2}	u_{b3}	$\ddot{u}_2$
$\underline{H}_\infty^{(1),(2)}$	pL_0	pL_1	S_a	S_c	K_L	L_3/L_2	$\underline{u}_L$	u_{b2}	u_{a3}	$-\ddot{u}_2$

Tabelle 1

Die Tabelle besagt also folgendes. Ersetzt man in $\underline{H}_0^{(1)}$ und $\underline{H}_0^{(2)}$ die in der oberen Reihe der Tabelle stehenden Parameter durch die entsprechenden der unteren Reihe, so sind die dadurch entstehenden Matrizen identisch mit $\underline{H}_\infty^{(1)}$ und $\underline{H}_\infty^{(2)}$. Führt man alle Substitutionen auch an der Schaltung in Bild 37 aus, so bekommt man auf diese Weise ohne weitere Überlegung die Schaltung der Teilsumme $\underline{H}_\infty^{(1)} + \underline{H}_\infty^{(2)}$ von $\underline{H}^{(g)}$. Sie ist in Bild 38 dargestellt. Dabei ist wegen Tabelle 1 $L_K = L_1(S_a S_c)^2/K_L$.

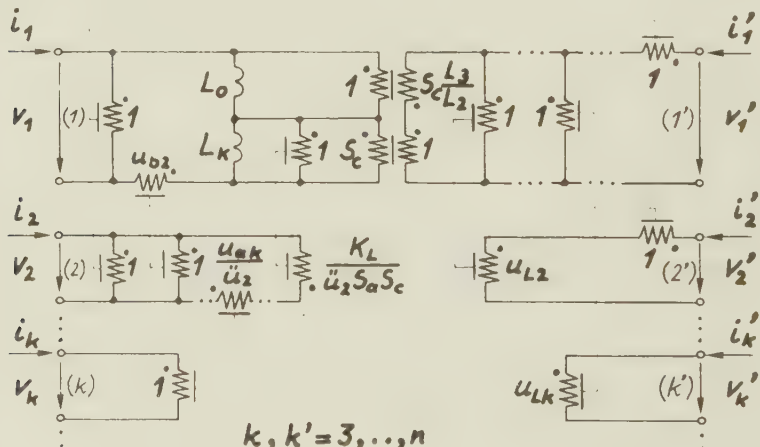
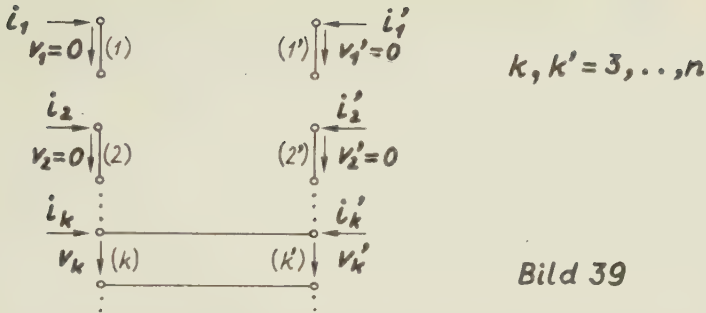
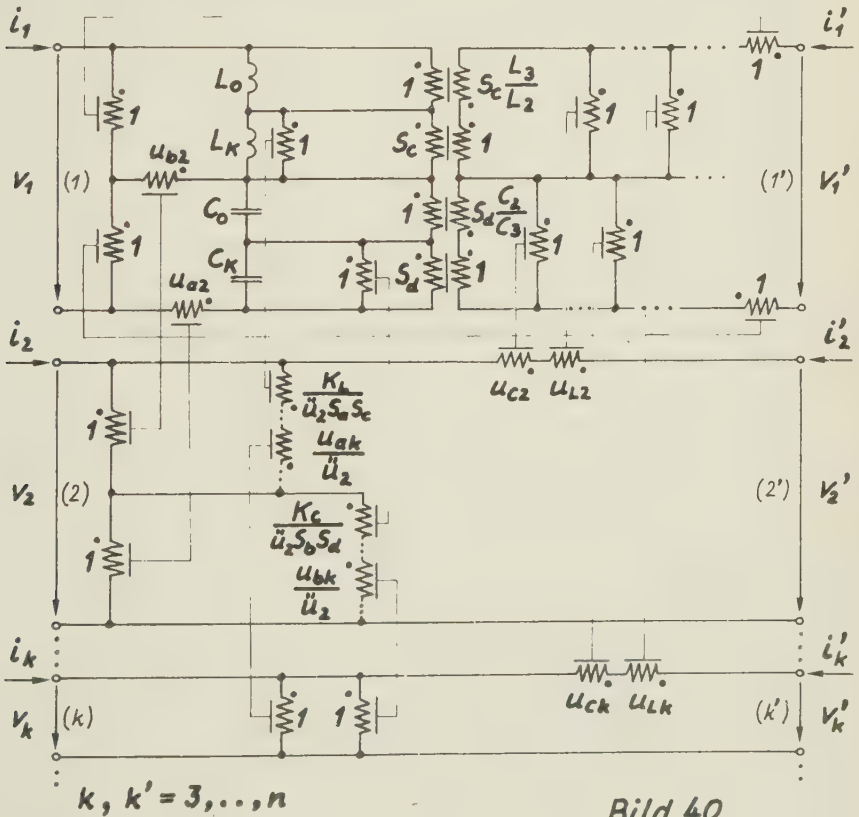


Bild 38

Die Realisierung von $\underline{H}_s$ erfordert wenig Mühe. Wir greifen hierzu auf Gl.(2.99 b) und die zugehörige Schaltung in Bild 28a zurück. Da dort fast identische Verhältnisse vorlagen, kann die Schaltung für $\underline{H}_s$ sofort angegeben werden (Bild 39).



Durch die Reihenparallelschaltung der Netzwerke in den Bildern 37, 38 und 39 gewinnt man die Realisierung von $\underline{H}^{(g)}$ und damit die gesuchte äquivalente Schaltung zu dem Netzwerk in Bild 31. Bild 40 zeigt dieses Netzwerk.



Es ist offenbar kanonisch und realisierbar, und enthält außer vier Reaktanzen noch $4n + 6$ ideale Übertrager, davon zwei mit dem Übersetzungsverhältnis 1:1. Letztere sind nur der besseren Überschaubarkeit wegen nicht durch galvanische Verbindungen ersetzt worden. Damit ist die Anzahl aller Schaltelemente in Bild 40 um acht größer als ihre Mindestanzahl $4n + 2$, die gleich der Zahl der freien Parameter in $\underline{H}^{(g)}$ ist. Es sind die folgenden: $4(n - 1)$ Übersetzungsverhältnisse ($\underline{u}_{L2}$, $\underline{u}_{C2}$, $\underline{u}_{a2}$, $\underline{u}_{b2}$), jeweils drei freie Parameter für L_1 , L_2 , L_3 , L_4 (eine Bindung durch Gl. (2.85 a)) und für C_1 , C_2 , C_3 , C_4 (eine Bindung durch Gl. (2.85 b)), zusammen also $4n + 2$.

Die äquivalente Schaltung war unter der Voraussetzung $n > 1$ hergeleitet worden, denn nur für diesen Fall war die Bildung einer Gyration von $\underline{H}$ nach Gl. (2.105 b) möglich gewesen. Eine Nachprüfung des Ergebnisses für $n = 1$ ist daher nur anhand der Gln. (2.105 b-f) möglich. Für diesen Sonderfall gelten die nachstehenden Vereinfachungen:

$$\underline{u}_a = \underline{u}_b = -1, \underline{u}_L = \underline{u}_C = +1, \underline{u}_1 = 1, \underline{E}_{n1} = 1, \underline{F}_{n, n-1} = 0,$$

$$K_L = \frac{L_4}{L_1}, K_C = \frac{C_1}{C_4}, C_0 = \frac{C_2}{C_3}(C_2 + C_3), L_0 = \frac{L_2^2}{L_2 + L_3}, \omega_1^2 = \frac{1}{L_4 C_4},$$

$$(\text{also } L_4, C_4 > 0), S_a = S_b = 0, S_c = S_d = -1, t = 1.$$

Damit geht $\underline{H}$ von Gl. (2.105 b) in die (2,2)-Impedanzmatrix

$$\underline{Z}_R = \frac{C_2 + C_3}{p C_2 C_3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{C_3}{C_2 + C_3} \\ \frac{C_3}{C_2 + C_3} & \left(\frac{C_3}{C_2 + C_3}\right)^2 \end{bmatrix} + p(L_2 + L_3) \begin{bmatrix} 1 & \frac{L_2}{L_2 + L_3} \\ \frac{L_2}{L_2 + L_3} & \left(\frac{L_2}{L_2 + L_3}\right)^2 \end{bmatrix} + \frac{p L_4}{p^2 L_4 C_4 + 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

über. Die Realisierung dieser Matrix ist in Bild 41 dargestellt und entspricht dem erwarteten Ergebnis [7].

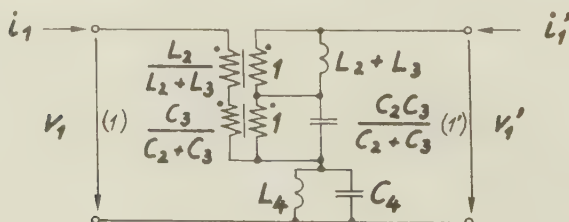


Bild 41

II.3. Das zweite Syntheseverfahren: der Realisierungsprozeß von Duffin, Hazony und Morrison [12] und einige daraus abgeleitete Varianten

II.3.1. Überblick

Wie das in Kap. II.2. behandelte Verfahren ist auch dasjenige der Autoren Duffin, Hazony und Morrison eine auf n -Tore verallgemeinerte Fassung eines Zweipolsyntheseprozesses, hier des Brune-Prozesses [6]. Der wesentliche Unterschied und zugleich Vorteil gegenüber dem vergleichbaren Tellegen-Verfahren [4] besteht darin, daß die Matrix zum Zweck der Gradreduktion während des ganzen Entwicklungszyklus nicht mehr invertiert zu werden braucht. Vielmehr genügt - unter stets erfüllbaren Voraussetzungen - die viel einfachere Bildung von Gyrationen. Damit verläuft die Synthese in enger Analogie zu der klassischen Brune-Synthese. Der Schaltungsaufwand des Verfahrens ist derselbe wie bei Tellegen und somit minimal.

Im folgenden wird zunächst das Originalverfahren der drei genannten Autoren beschrieben, anschließend daran zwei naheliegende Varianten. In einem weiteren Abschnitt werden die während der jeweiligen Entwicklungszyklen anfallenden und nicht realisierbaren Reaktanz- $2n$ -Tore in eine äquivalente realisierbare Gestalt transformiert.

Den Ausgangspunkt für die Verfahren bildet die "realteilreduzierte" Impedanzmatrix, d.h. die Impedanzmatrix mit bereits singulärem Realteil. Über Art und Weise der Realteilreduktion, vermöge der die gegebene Impedanzmatrix in diese Ausgangsform gebracht wird, besteht keine Vorschrift. Praktisch kamen jedoch hierfür bisher nur die Methoden von McMillan [5] und Tellegen [4] in Betracht. Einer weiteren und davon völlig verschiedenen Möglichkeit, die Realteilmatrix singulär zu machen, ist der letzte Abschnitt dieses Kapitels gewidmet. Die Anwendung dieser Methode ist zwar an bestimmte Voraussetzungen bezüglich des Realteils der gegebenen Matrix gebunden, ermöglicht aber die Verringerung des Rechenaufwandes im Verlaufe eines Entwicklungszyklus. Unter noch weitergehenden Voraussetzungen ist beim Vierpol ($n = 2$) sogar die Einsparung idealer Übertrager und

- in bestimmter Weise - deren Ersatz durch Ohmwiderstände möglich. Einer der sich so ergebenden, modifizierten Syntheseprozesse führt zu einem Schaltungstyp, der schon von Lüder vorgestellt wurde [19]. Die hier beschriebene Synthese ist jedoch dem Verfahren von Lüder aus zwei Gründen vorzuziehen: sie ist einerseits kürzer und einfacher, andererseits enthält die resultierende Vierpolschaltung in jedem Fall nur positive Schaltelemente.

II.3.2. Das Syntheseverfahren von Duffin, Hazony und Morrison¹⁾

Gegeben ist eine (n,n) -Impedanzmatrix $\underline{Z}(p)$ mit dem normalen Rang n . Sie lautet in partitionierter Schreibweise

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12}^T \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

Diese Form erweist sich als günstig für die Herleitung des Verfahrens, dessen Anwendbarkeit jedoch auf verschiedenen Voraussetzungen basiert. Zunächst seien mögliche Pole bei $p = 0$ und $p = \infty$ gemäß Satz 10 abgespalten und realisiert worden. Wir nehmen weiter an, der Realteil von $\underline{Z}$ sei mit Hilfe einer der Methoden von Tellegen [4] oder McMillan [5] so weit reduziert worden, daß an einer Stelle $j\omega_0$ der imaginären Achse $\operatorname{Re} \underline{Z}(j\omega_0)$ singular, d.h. vom Rang $r_Z \leq n - 1$ ist. Schließlich muß eine reelle, nichtsinguläre Matrix $\underline{T}$ so bestimmt werden, daß mit

$$\underline{Z}_1 = \underline{T}^T \underline{Z} \underline{T} \quad (2.114)$$

die Beziehung

$$\operatorname{Re} \underline{Z}_{11}(j\omega_0) = 0 \quad (2.115)$$

erfüllt ist. Die Transformationsmatrix $\underline{T}$ mit dieser Eigenschaft hat Satz 25 zufolge im einfachsten Fall die Gestalt

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \underline{t}_{21} & \underline{1}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{t}_{21} = - \frac{\operatorname{Re} \underline{Z}_{11}}{\operatorname{Re} \underline{Z}_{21}^T \operatorname{Re} \underline{Z}_{21}} \operatorname{Re} \underline{Z}_{21} \Big|_{p=j\omega_0} \quad (2.116)$$

1) Der Kürze wegen wird das Verfahren künftig nur durch den ersten Autorennamen (Duffin) gekennzeichnet.

Es ist dabei gleichgültig, ob der Rang von $\text{Re } \underline{Z}(j\omega_0)$ gleich oder kleiner als $n - 1$ ist.

Zur Veranschaulichung der Gl.(2.114) beziehen wir uns auf Satz 27 und Bild 4. Danach wird $\underline{Z}$ durch die Kettenschaltung des durch $\underline{T}$ beschriebenen Kongruenzübertragers und des n -Tors für $\underline{Z}_1$ realisiert. Das Übertragernetzwerk läßt sich gemäß Gl.(1.39) durch die Verknüpfung zwischen $\underline{i}$ und $\underline{i}_1$, nämlich

$$\underline{i} = \underline{T} \underline{i}_1 \quad (2.117a)$$

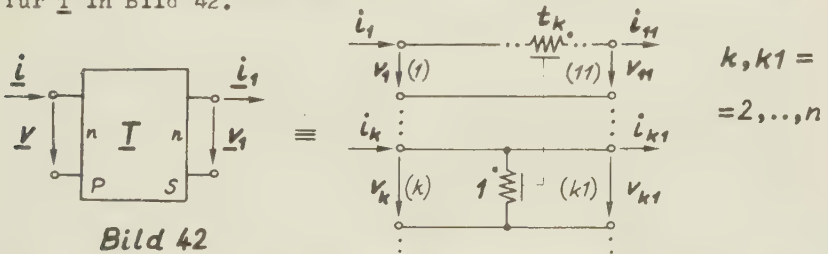
beschreiben. Mit den Bezeichnungen

$$\underline{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}, \quad \underline{i}_1 = \begin{bmatrix} i_{11} \\ \vdots \\ i_{n1} \end{bmatrix}, \quad \underline{t}_{12} = \begin{bmatrix} t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

erhält man aus Gl.(2.117 a) die Komponentengleichungen

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_{11}, \\ i_k &= t_k i_{11} + i_{k1} \quad (k = 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} (2.117b)$$

und damit in Anlehnung an Gl.(1.48 a) und Bild 8 das Netzwerk für $\underline{T}$ in Bild 42.



An dieser Stelle setzt das eigentliche Verfahren ein. Je nach der Lage von ω_0 gibt es zwei grundsätzlich verschiedene und daher auch getrennt zu diskutierende Fälle.

Fall 1: $\omega_0 = 0$ oder $\omega_0 = \infty$. Aus der Realteilbedingung für die Impedanzmatrix $\underline{Z}_1$

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } Z_{11}, \text{Re } Z_{kk,1} - (\text{Re } Z_{1k,1})^2|_{p=j\omega} &\geq 0 \\ (k = 2, \dots, n; 0 \leq \omega \leq \infty) \end{aligned} \right\} (2.119)$$

ergibt sich einerseits in Verbindung mit Gl.(2.115)

$$\operatorname{Re} Z_{1k,1}(j\omega_0) = 0, \quad \operatorname{Re} Z_{21,1}(j\omega_0) = 0, \quad (2.120a)$$

andererseits gilt für den Imaginärteil von Z_1 bei $\omega_0 = 0$ oder $\omega_0 = \infty$ bekanntlich

$$\operatorname{Im} Z_1(j\omega_0) = 0. \quad (2.120b)$$

Also hat Z_1 bei $j\omega_0$ eine Nullstelle. Damit sind wir in der Lage, den Grad von Z_1 zu reduzieren. Wir bilden dazu die Gyration von Z_1 um sein erstes Diagonalelement $Z_{11,1}$; sie wird gemäß Abschn. I.5.5. mit $\Gamma_1(Z_1)$ bezeichnet. Mit Gl.(1.56), die das Bildungsgesetz für die normale Gyration angibt, und mit Z_1 in der Form von Gl.(2.113) erhält man

$$\underline{H}_1 = \Gamma_1(Z_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{Z}_{21,1} \end{bmatrix} \frac{1}{Z_{11,1}} \begin{bmatrix} 1 & -\underline{Z}_{21,1}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{22,1} \end{bmatrix}. \quad (2.121)$$

$\underline{H}_1$ hat wegen $Z_{11,1}(j\omega_0) = 0$ einen Pol bei $p = j\omega_0$, den man gemäß der Beziehung

$$\underline{H}_1 = \underline{H}_2 + \begin{cases} \frac{1}{p} \underline{P}_0 & (\omega_0 = 0) \\ p \underline{P}_\infty & (\omega_0 = \infty) \end{cases} \quad (2.122a)$$

abspalten kann. Wegen $Z_{21,1}(j\omega_0) = 0$ und

$$\frac{1}{Z_{11,1}} = Y_{11,2} + \begin{cases} \frac{1}{p} K_0 & (\omega_0 = 0) \\ p K_\infty & (\omega_0 = \infty) \end{cases}$$

haben die Residuen die einfache Form

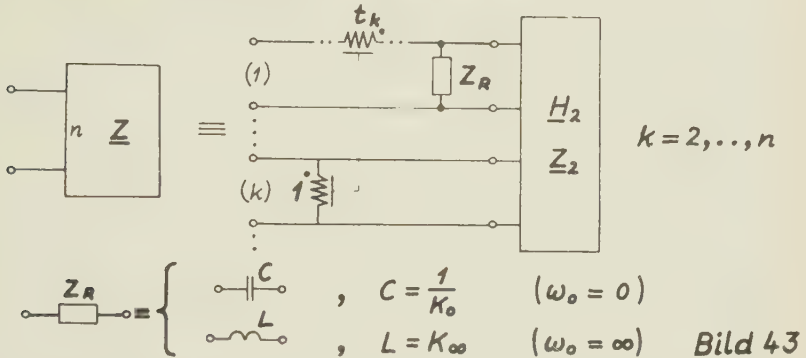
$$\underline{P}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{P}_\infty = \begin{bmatrix} K_\infty & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.122b)$$

Mit Gl.(2.122 b) ergibt sich $\underline{H}_1$ nach Gl.(2.122 a) schließlich zu

$$\underline{H}_1 = \Gamma_1(\underline{Z}_2) + \begin{cases} \frac{1}{p} K_0 \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T \\ p K_\infty \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T \end{cases}. \quad (2.123)$$

Da die Matrix $\underline{E}_2$ nach Satz 19 zufolge wie $\underline{H}_1$ Hybridmatrix ist, ist $\underline{Z}_2$ wiederum symmetrische PRM; ihr Grad ist um eins geringer als derjenige von Z_1 . Damit ist für Fall 1 das Verfahren beendet; $\underline{Z}_2$ bildet den Ausgangspunkt für den nächsten Entwicklungszyklus.

Konstruiert man die Schaltung für $\underline{H}_1$ nach Gl.(2.123) unter Anwendung von Satz 17, so erhält man zusammen mit den bisherigen Ergebnissen als Schaltung für $\underline{Z}$ das in Bild 43 gezeigte n-Tor.



Fall 2: $\omega_0 \neq 0, \infty$. Wie beim Brune - Prozeß [6] ist hier noch eine Unterscheidung von zwei Fällen nötig, je nachdem, ob das Vorzeichen des - rein imaginären - Diagonalelements $\underline{Z}_{11,1}(j\omega_0)$ negativ oder positiv ist.¹⁾

$$a) \underline{Z}_{11,1}(j\omega_0) = -j\omega_0 L_1 \quad (L_1 > 0) \quad (2.124a)$$

$$b) \underline{Z}_{11,1}(j\omega_0) = \frac{1}{-j\omega_0 C_1} \quad (C_1 > 0) \quad (2.124b)$$

Auch der Vektor $\underline{Z}_{21,1}(j\omega_0)$ ist rein imaginär, wie aus der Realteilbedingung Gl.(2.119) in Verbindung mit Gl.(2.115) zu ersehen ist.

$$\underline{Z}_{21,1}(j\omega_0) = j\underline{m} \quad (\underline{m} = [m_2, \dots, m_n]^T, \text{reell}) \quad (2.124c)$$

Entsprechend zu den in Kap. II.2. geschilderten Verfahren gehen wir auch hier darauf aus, durch den Abbau von Polen den Grad der Matrix zu verringern. Im Unterschied zum erweiterten Unbehauen-Prozeß [7] addiert man zu diesem Zweck aber nicht zu sämtlichen Matrizenelementen von $\underline{Z}_1$, sondern nur zu $\underline{Z}_{11,1}$ eine möglichst einfache Reaktanzfunktion derart, daß die Summe bei $p = j\omega_0$ und damit auch bei $p = -j\omega_0$ je eine Nullstelle besitzt. Das Aussehen dieser Funktion ist durch die Gln.(2.124 a,b) praktisch schon gegeben:

1) Im Fall $\underline{Z}_{11,1}(j\omega_0) = 0$ entfällt der erste Abbauschritt.

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } Z_{11,2} = Z_{11,1} + pL_1, \text{ also } Z_{11,2}(j\omega_0) = 0, \\ \text{oder in Matrizenform} \\ \underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 + pL_1 \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T. \end{array} \right\} (2.125a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } Z_{11,2} = Z_{11,1} + \frac{1}{pC_1}, \text{ also } Z_{11,2}(j\omega_0) = 0, \\ \text{oder in Matrizenform} \\ \underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 + \frac{1}{pC_1} \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T. \end{array} \right\} (2.125b)$$

Offenbar ist auch $\underline{Z}_2$ als Summe zweier PRM wieder positiv reell.¹⁾ Wir sind nun in der Lage, den Grad von $\underline{Z}_2$, der seinerseits um eins größer ist als der von $\underline{Z}_1$, zu verringern. Wir bilden dazu entsprechend Gl.(2.121) die Gyration von $\underline{Z}_2$, wobei allerdings $Z_{11,1}$ durch $Z_{11,2}$ ersetzt werden muß, und nennen sie $\underline{H}_2$. Sie besitzt an denselben Stellen Pole, an denen $Z_{11,2}$ Null wird. Zur Veranschaulichung dieser Tatsache schreiben wir

$$\underline{H}_2 = \frac{\underline{P}_{\omega_0}}{p-j\omega_0} + \frac{\underline{P}_{(-\omega_0)}}{p+j\omega_0} + \underline{H}_3. \quad (2.126a)$$

Berücksichtigt man die dazu analoge Darstellung von $1/Z_{11,2}$,

$$\frac{1}{Z_{11,2}} = \frac{K/2}{p-j\omega_0} + \frac{K/2}{p+j\omega_0} + Y_{11,3},$$

so berechnet man aus beiden Gleichungen das Residuum $\underline{P}_{\omega_0}$ zu

$$\begin{aligned} \underline{P}_{\omega_0} &= \underline{H}_2(p)(p-j\omega_0)|_{p=j\omega_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ j\underline{m} \end{bmatrix} \frac{K}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j\underline{m}^T \end{bmatrix} \\ &= \frac{K}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j\underline{m}^T \\ j\underline{m} & \underline{m}\underline{m}^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.126b)$$

Mit $\underline{P}_{\omega_0}$ ist nach Satz 18, Gln.(1.27 a,b), auch $\underline{P}_{(-\omega_0)}$ bekannt:

$$\underline{P}_{(-\omega_0)} = \frac{K}{2} \begin{bmatrix} 1 & j\underline{m}^T \\ -j\underline{m} & \underline{m}\underline{m}^T \end{bmatrix} \quad (2.126c)$$

Mit $\underline{P}_{\omega_0}$ und $\underline{P}_{(-\omega_0)}$ folgt aus Gl.(2.126 a)

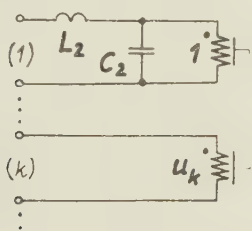
1) Bezüglich der schaltungsmäßigen Veranschaulichung der Gln. (2.125 a,b) sei beispielsweise auf Satz 10 und Bild 2 verwiesen.

$$\underline{H}_2 = \frac{K}{p^2 + \omega_0^2} \begin{bmatrix} p & \omega_0 \underline{m}^T \\ -\omega_0 \underline{m} & p \underline{m} \underline{m}^T \end{bmatrix} + \underline{H}_3 = \underline{H}_q + \underline{H}_3 \quad (2.127)$$

Die bei $p = \pm j\omega_0$ polfreie Matrix $\underline{H}_3$ ist wegen Satz 19 wieder Hybridmatrix; ihr Grad ist um zwei geringer als der Grad von $\underline{Z}_2$. Die schaltungsmäßige Verwirklichung der Hybridmatrix $\underline{H}_3$ findet man leicht, wenn man die Gyration $\underline{Z}_3 = \Gamma_1(\underline{H}_3)$ bildet.

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_q &= \frac{p}{K} \underline{E}_n \underline{E}_n^T + \frac{\omega_0^2}{Kp} (\underline{E}_n + \underline{F}_{n,n-1} \underline{u}) (\underline{E}_n^T + \underline{u}^T \underline{F}_{n,n-1}^T) \\ \underline{u} &= -\frac{K}{\omega_0} \underline{m} \end{aligned} \right\} (2.128)$$

$\underline{Z}_q$ ist die Impedanzmatrix eines Reaktanz-n-Tors und besitzt die folgende Realisierung:



$$L_2 = \frac{1}{K} > 0, C_2 = \frac{K}{\omega_0^2} > 0,$$

$$\underline{u} = [u_2, \dots, u_n]^T, k = 2, \dots, n.$$

Bild 44

Die Schaltung für $\underline{H}_2$ läßt sich gemäß Satz 17 als Parallelreihenschaltung der beiden zu $\underline{H}_q$ (Bild 44) und zu $\underline{H}_3$ gehörigen n-Tore herleiten, und zwar müssen die Tore (1) parallel, die übrigen Tore von jeweils gleicher Ordnungszahl in Reihe geschaltet werden.

Für die weitere Verwirklichung von $\underline{H}_3$ ist es entscheidend, daß diese Matrix ebenso wie $\underline{H}_2$ entweder bei $p = 0$ oder bei $p = \infty$ G-singulär ist¹⁾. Dies ist eine Folge davon, daß $\underline{Z}_2$ an einer dieser beiden Stellen einen künstlich geschaffenen Pol besitzt (vgl. die Gln.(2.125 a,b)). Die erwähnte G-Nullstelle von $\underline{H}_3$ kann Satz 33 zufolge von der Gyration $\underline{Z}_3 = \Gamma_1(\underline{H}_3)$ als Pol abgespalten werden. Zur Berechnung des zugehörigen Residuums rekapitulieren wir die beiden vorausgegangenen Entwicklungsschritte.

a) Aus den Gln.(2.127),(2.125 a) erhalten wir mit $\underline{H}_2 = \Gamma_1(\underline{Z}_2)$

1) vgl. Abschn. 1.5.5., Definition 15

$$\underline{H}_3(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{11,1} + pL_1} - \frac{Kp}{p^2 + \omega_0^2} & -\frac{\underline{Z}_{21,1}^T}{Z_{11,1} + pL_1} - \frac{K\omega_0 m^T}{p^2 + \omega_0^2} \\ \frac{\underline{Z}_{21,1}}{Z_{11,1} + pL_1} + \frac{K\omega_0 m}{p^2 + \omega_0^2} & Z_{22,1} - \frac{\underline{Z}_{21,1} \underline{Z}_{21,1}^T}{Z_{11,1} + pL_1} - \frac{Kpm m^T}{p^2 + \omega_0^2} \end{bmatrix}. \quad (2.129)$$

Dann gilt für das Verhalten der Matrizen $\underline{H}_3$ und $\underline{Z}_3$, jeweils bei $p = \infty$:

$$\underline{H}_3(p)|_{p \rightarrow \infty} = \begin{bmatrix} \frac{1}{pL_1} - \frac{K}{p} & -\frac{\underline{Z}_{21,1}^T(\infty)}{pL_1} \\ \frac{\underline{Z}_{21,1}(\infty)}{pL_1} & \underline{Z}_{22,1}(\infty) \end{bmatrix}, \quad (2.130a)$$

$$\underline{Z}_3(p)|_{p \rightarrow \infty} = pL_3 \underline{E}_{n_1} \underline{E}_{n_1}^T \quad (L_3 = \frac{L_1}{1 - KL_1} = \frac{L_1 L_2}{L_2 - L_1} > 0). \quad (2.130b)$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß $\underline{Z}_1$ bei $p = \infty$ regulär ist.

Als Gyration einer Hybridmatrix ist $\underline{Z}_3$ Impedanzmatrix; infolgedessen ist das Residuum seines Poles bei $p = \infty$ psd. Demnach muß auch L_3 - wie in Gl.(2.130 b) angedeutet - positiv sein. Spaltet man den genannten Pol von $\underline{Z}_3$ gemäß der Beziehung

$$\underline{Z}_3(p) = pL_3 \underline{E}_{n_1} \underline{E}_{n_1}^T + \underline{Z}_4(p) \quad (2.131)$$

ab, so ist $\underline{Z}_4$ wegen Satz 10 ebenso wie $\underline{Z}_3$ Impedanzmatrix mit einem um eins geringeren Grad als $\underline{Z}_3$.

Damit ist - was Fall 2a) betrifft - ein Entwicklungszyklus des Verfahrens abgeschlossen, in dessen Verlauf der Grad der gegebenen Impedanzmatrix $\underline{Z}$ um insgesamt zwei reduziert wurde. Die Impedanzmatrix $\underline{Z}_4$ bildet den Ausgangspunkt für den nächsten Entwicklungszyklus; gegebenenfalls müssen bei $\underline{Z}_4$ durch geeignete Maßnahmen zuerst die früher besprochenen Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des Verfahrens geschaffen werden. In Bild 45 ist nunmehr - als Zusammenfassung der während des Entwicklungszyklus gewonnenen Teilergebnisse - die Schaltung von $\underline{Z}_1$ dargestellt, aus welcher sich dann anhand der Bilder 4 und 42 das Netzwerk für die gegebene Matrix $\underline{Z}$ gewinnen läßt.

Für die drei in Bild 45 vorkommenden Induktivitäten gilt wegen Gl.(2.130 b) der Zusammenhang

$$-\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} = 0. \quad (2.132)$$

Er entspricht der bekannten Beziehung, die auch von den drei

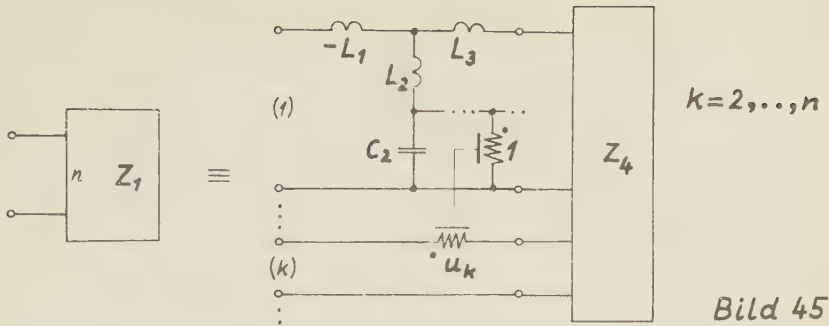


Bild 45

Induktivitäten der Brune-Schaltung [6] erfüllt wird. Wir können daher den nicht realisierbaren Induktivitätsstern in Bild 45 durch einen realisierbaren, festgekoppelten Übertrager ersetzen. Darauf wird in Abschn. II.3.4. näher einzugehen sein.

b) Aus den Gln. (2.127), (2.125 b) erhalten wir mit $\underline{H}_2 = \Gamma_1(\underline{Z}_2)$

$$\underline{H}_3(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{n,1} + \frac{1}{pC_1}} - \frac{Kp}{p^2 + \omega_0^2} & -\frac{\underline{Z}_{21,1}}{Z_{n,1} + \frac{1}{pC_1}} - \frac{K\omega_0 \underline{m}^T}{p^2 + \omega_0^2} \\ \frac{\underline{Z}_{21,1}}{Z_{n,1} + \frac{1}{pC_1}} + \frac{K\omega_0 \underline{m}}{p^2 + \omega_0^2} & \underline{Z}_{22,1} - \frac{\underline{Z}_{21,1} \underline{Z}_{21,1}^T}{Z_{n,1} + \frac{1}{pC_1}} - \frac{Kp \underline{m} \underline{m}^T}{p^2 + \omega_0^2} \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

Dann gilt für das Verhalten von $\underline{H}_3$ und seiner Gyration

$\underline{Z}_3 = \Gamma_1(\underline{H}_3)$, jeweils bei $p = 0$:

$$\underline{H}_3(p)|_{p \rightarrow 0} = \begin{bmatrix} pC_1 - \frac{K}{\omega_0^2} p & -\frac{K}{\omega_0} \underline{m}^T \\ \frac{K}{\omega_0} \underline{m} & \underline{Z}_{22,1}(0) \end{bmatrix}, \quad (2.134a)$$

$$\underline{Z}_3(p)|_{p \rightarrow 0} = \frac{1}{pC_3} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{K}{\omega_0} \underline{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{K}{\omega_0} \underline{m}^T \end{bmatrix} \quad (C_3 = C_1 - \frac{K}{\omega_0^2} = C_1 - C_2 > 0) \quad (2.134b)$$

oder

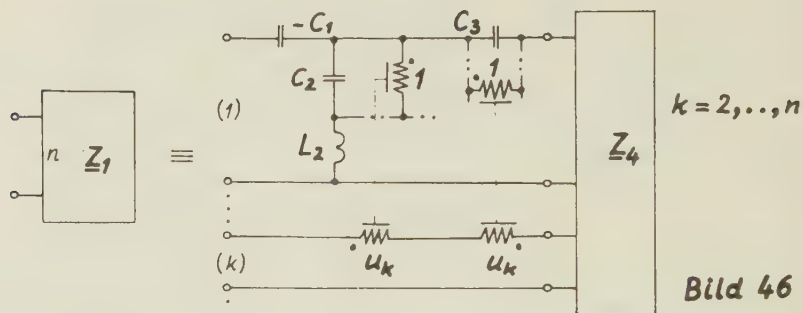
$$\underline{Z}_3(p)|_{p \rightarrow 0} = \frac{1}{pC_3} (\underline{E}_{n,1} + \frac{K}{\omega_0} \underline{F}_{n,n-1} \underline{m}) (\underline{E}_{n,1}^T + \frac{K}{\omega_0} \underline{m}^T \underline{F}_{n,n-1}^T).$$

Diesen Pol bei $p = 0$ spalten wir von $\underline{Z}_3$ ab und erhalten die - der Gl. (2.131) entsprechende - Beziehung

$$\underline{Z}_3(p) = \frac{1}{pC_3} (\underline{E}_{n,1} + \frac{K}{\omega_0} \underline{F}_{n,n-1} \underline{m}) (\underline{E}_{n,1}^T + \frac{K}{\omega_0} \underline{m}^T \underline{F}_{n,n-1}^T) + \underline{Z}_4(p). \quad (2.135)$$

Den Nachweis, daß $\underline{Z}_4$ Impedanzmatrix und C_3 positiv ist, führen wir analog zu Fall 2a). Bezüglich der abschließenden Ausführungen sei ebenfalls auf dort verwiesen. Wir können nun die Schaltung für $\underline{Z}_1$ angeben; sie hat die in Bild 46 gezeigte Gestalt.

Label wurde der Pol von $\underline{Z}_3$ bei $p = 0$ gemäß Satz 10 verwirklicht.



Wegen Gl.(2.134 b) gilt für die drei Kapazitäten der Zusammenhang

$$-C_1 + C_2 + C_3 = 0 \quad (2.136)$$

Das Reaktanz-2n-Tor in Bild 46 ist im Gegensatz zur entsprechenden Schaltung in Bild 45 nicht struktursymmetrisch und enthält zudem $n - 1$ mehr ideale Übertrager als jene. Man kann jedoch die völlige Analogie zu Fall 2a) wiederherstellen, wenn man den oben geschilderten Entwicklungszyklus gemäß den folgenden Ausführungen modifiziert.

b') In Gl.(2.127) waren die beiden Pole bei $p = \pm j\omega_0$ als Matrix $\underline{H}_4$ von $\underline{H}_2$ abgespalten worden. Es galt damit die Zerlegung

$$\underline{H}_2 = \underline{H}_q + \underline{H}_3 \quad .$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung bleibt gewahrt, wenn wir $\underline{H}_q$ und $\underline{H}_3$ sinngemäß durch $\underline{H}_q + \underline{H}_s$ bzw. $\underline{H}_3 - \underline{H}_s$ ersetzen. Hierbei bedeutet $\underline{H}_s$ eine konstante Hybridmatrix. Wir wählen speziell

$$\underline{H}_s = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{K}{\omega_0} \underline{m}^T \\ \frac{K}{\omega_0} \underline{m} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (2.137)$$

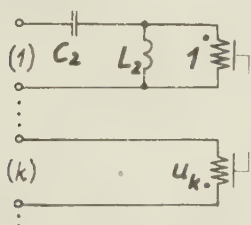
und erhalten damit statt Gl.(2.127) die Aufspaltung

$$\underline{H}_2 = \frac{K}{p^2 + \omega_0^2} \begin{bmatrix} p & -\frac{p^2}{\omega_0} \underline{m}^T \\ \frac{p^2}{\omega_0} \underline{m} & p \underline{m} \underline{m}^T \end{bmatrix} + (\underline{H}_3 - \underline{H}_s) = \underline{H}_q^{(n)} + \underline{H}_3^{(n)} \quad (2.138)$$

Aus Satz 29 in Teil I wissen wir, daß die Matrix $\underline{H}_s$ durch ein nur aus idealen Übertragern bestehendes n-Tor realisiert werden kann; für $\underline{H}_s$ gilt Entsprechendes, d.h., daß die Übersetzungsverhältnisse das umgekehrte Vorzeichen besitzen. Es ist also klar, daß die an die Stelle von $\underline{H}_1$ und $\underline{H}_3$ getretenen Matrizen $\underline{H}_q^{(1)}$ und $\underline{H}_3^{(1)}$ als Summen von Hybridmatrizen beide wieder Hybridmatrizen sind (Satz 17). Wir verfahren nun weiterhin entsprechend den an Gl.(2.127) anschließenden und in Fall 2b) angestellten Überlegungen. $\underline{H}_q^{(1)}$ wird mit Hilfe seiner Gyration

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1(\underline{H}_q^{(1)}) &= \underline{Z}_q^{(1)} = \frac{\omega_0^2}{Kp} \underline{E}_n \underline{E}_n^T + \frac{p}{K} (\underline{E}_n - \underline{F}_{n,n-1} \underline{u}) (\underline{E}_n^T - \underline{u}^T \underline{F}_{n,n-1}^T), \\ \underline{u} &= -\frac{K}{\omega_0} \underline{m} \end{aligned} \right\} (2.139)$$

realisiert, die ihrerseits - wie man leicht nachprüft - die Impedanzmatrix des Reaktanz-n-Tors in Bild 47 ist.



$$L_2 = \frac{1}{K} > 0, \quad C_2 = \frac{K}{\omega_0^2} > 0,$$

$$\underline{u} = [u_2, \dots, u_n]^T, \quad k = 2, \dots, n.$$

Bild 47

Die zweite Matrix in Gl.(2.138), $\underline{H}_3^{(1)}$, hat bei $p = 0$ eine G-Nullstelle, die Satz 33 zufolge von $\underline{Z}_3^{(1)} = \Gamma_1(\underline{H}_3^{(1)})$ als Fol abgespalten wird. Zur Bestimmung des Polresiduums drücken wir $\underline{H}_3^{(1)}$ entsprechend Gl.(2.133) durch die Teilmatrizen von $\underline{Z}_2$ und $\underline{H}_q^{(1)}$ aus:

$$\underline{H}_3^{(1)}(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{n,1} + \frac{1}{pC_1}} - \frac{Kp}{p^2 + \omega_0^2} & -\frac{Z_{2,1}^T}{Z_{n,1} + \frac{1}{pC_1}} + \frac{Km^T}{\omega_0} \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2} \\ \frac{Z_{2,1}}{Z_{n,1} + \frac{1}{pC_1}} - \frac{Km}{\omega_0} \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2} & Z_{2,1} - \frac{Z_{2,1} Z_{2,1}^T}{Z_{n,1} + \frac{1}{pC_1}} - \frac{Kpmm^T}{p^2 + \omega_0^2} \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

In der Umgebung von $p = 0$ gilt dann

$$\underline{H}_3^{(1)}(p)|_{p \rightarrow 0} = \begin{bmatrix} pC_1 - \frac{K}{\omega_0^2} p & -pC_1 Z_{2,1}^T(0) \\ pC_1 Z_{2,1}(0) & Z_{2,1}(0) \end{bmatrix} \quad (2.141a)$$

und

$$\underline{Z}_3^{(n)}(p)|_{p \rightarrow 0} = \frac{1}{pC_3} \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T \quad (C_3 = C_1 - \frac{K}{\omega_0^2} = C_1 - C_2 > 0). \quad (2.141b)$$

Nach der Abspaltung dieses Poles bei $p = 0$ von $\underline{Z}_3$ gemäß der Beziehung

$$\underline{Z}_3^{(n)}(p) = \frac{1}{pC_3} \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T + \underline{Z}_4^{(n)}(p) \quad (2.142)$$

bleibt eine Matrix $\underline{Z}_4^{(n)}$ übrig, die bei $p = 0$ regulär ist. $\underline{Z}_4^{(n)}$ ist bekanntlich Impedanzmatrix, und sein Grad ist um zwei geringer als der Grad von $\underline{Z}$. Als Ergebnis des modifizierten Entwicklungszyklus bekommen wir für $\underline{Z}_1$ eine Schaltung, welche die gewünschte und weiter vorne beschriebene Analogie zu der Schaltung in Bild 45 aufweist (Bild 48).

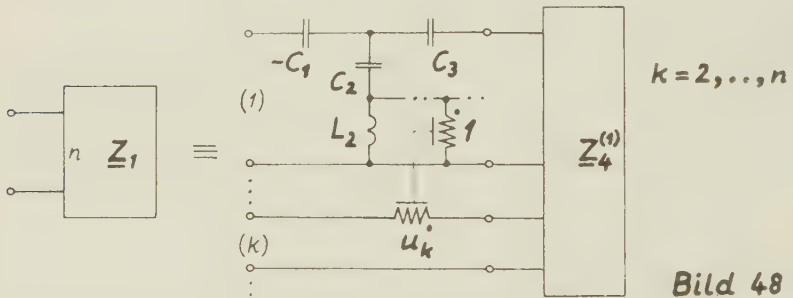


Bild 48

Wie im Fall 2b) bleibt auch hier der Zusammenhang (2.136) zwischen den drei Kapazitäten C_1 , C_2 und C_3 gültig. Er ermöglicht - in Analogie zu Gl.(2.132), Fall 2a) - den äquivalenten Ersatz des nicht realisierbaren Kapazitätssterns durch eine einzige positive Kapazität und einen idealen Übertrager. Hierauf wird in Abschn. II.3.4. näher eingegangen werden.

II.3.3. Zwei Varianten zum Verfahren von Luffin, Hazony und Morrison

II.3.3.1. Die erste Variante

Den Ausgangspunkt für das im folgenden zu beschreibende Verfahren bildet die Impedanzmatrix $\underline{Z}_1$ nach Gl.(2.114), die aus der gegebenen Matrix $\underline{Z}(p)$ mit Hilfe der in Abschn. II.3.2. geschilderten Methoden gewonnen wurde. Für die Stelle $j\omega_0$, an der die Gl.(2.115) erfüllt ist, soll einschränkend $\omega_0 \neq 0, \infty$

gelten, da die hier abgehandelte Variante für $\omega_0 = 0$ oder $\omega_0 = \infty$ nichts Neues gegenüber Abschn. II.3.2. bringt. Wie dort unterscheiden wir zwei Fälle a) und b), die durch negatives bzw. positives Vorzeichen des - rein imaginären - Diagonalelements $Z_{11,1}(j\omega_0)$ charakterisiert sind.

$$a) Z_{11,1}(j\omega_0) = -j\omega_0 L_1 \quad (L_1 > 0) \quad (2.143a)$$

$$b) Z_{11,1}(j\omega_0) = \frac{1}{-j\omega_0 C_1} \quad (C_1 > 0) \quad (2.143b)$$

Wie $Z_{11,1}(j\omega_0)$ sind auch die Elemente des Vektors $\underline{Z}_{21,1}(j\omega_0)$ rein imaginär. Das Verfahren von Duffin wurde nun damit eingeleitet, daß zu $Z_{11,1}$ die Reaktanzfunktion pL_1 bzw. $1/(pC_1)$ hinzuaddiert wurde; die so gebildete Summe $Z_{11,2}$ besaß demzufolge bei $p = j\omega_0$ die - für die folgende Gradreduktion notwendige - Nullstelle. Eine naheliegende Variation dieses Vorgehens besteht darin, durch entsprechende Maßnahmen auch einen Teil der Elemente von $\underline{Z}_{21,1}$ bei $p = j\omega_0$ zum Verschwinden zu bringen. Selbstverständlich bleibt die zuvor geschaffene Nullstelle von $Z_{11,2}$ hiervon unbeeinflusst.

Wir nehmen an, die Zahl der für die geschilderten Maßnahmen in Betracht kommenden Elemente von $\underline{Z}_{21,1}$ sei $r - 1$; nach der Vertauschung geeigneter Zeilen und der entsprechenden Spalten seien dies die Elemente $Z_{21,1}, Z_{31,1}, \dots, Z_{r1,1}$. Wir schreiben dann den Vektor $\underline{Z}_{21,1}$ in der Form

$$\underline{Z}_{21,1} = \underline{E}_{n-1,r-1} \underline{Z}_{21,1}^{(1)} + \underline{F}_{n-1,n-r} \underline{Z}_{21,1}^{(2)} \quad (2.144a)$$

Hierbei bedeuten $\underline{E}_{n-1,r-1}$ und $\underline{F}_{n-1,n-r}$ die in den Gln. (1.67 a, b) definierten Matrizen. Um uns die platzraubende Schreibung der Indizes zu ersparen, führen wir zur Abkürzung ein:

$$\underline{E}_{n-1,r-1} = \underline{E}_s, \quad \underline{F}_{n-1,n-r} = \underline{F}_s$$

Damit erhalten wir statt Gl. (2.144 a)

$$\underline{Z}_{21,1} = \underline{E}_s \underline{Z}_{21,1}^{(1)} + \underline{F}_s \underline{Z}_{21,1}^{(2)} \quad (2.144b)$$

Für $p = j\omega_0$ ergibt sich daraus, analog zu Gl. (2.124 c),

$$a) \underline{Z}_{21,1}(j\omega_0) = -j\omega_0 L_1 \underline{E}_s \underline{W}_1 + j \underline{F}_s \underline{m}_1, \quad (2.145a)$$

$$b) \underline{Z}_{21,1}(j\omega_0) = \frac{1}{-j\omega_0 C_1} \underline{E}_s \underline{W}_1 + j \underline{F}_s \underline{m}_1 \quad (2.145b)$$

Da $\underline{Z}_{21,1}(j\omega_0)$ - wie oben erwähnt - rein imaginär ist, sind

$\underline{w}_1$ bzw. $\underline{m}_1$ reelle Vektoren, und zwar ist im einzelnen

$$\underline{w}_1 = [w_2, \dots, w_r]^T, \quad \underline{m}_1 = [m_{r+1}, \dots, m_n]^T. \quad (2.145c)$$

Bildet man unter Verwendung von $\underline{w}_1$ die Reaktanzimpedanzmatrizen

$$p\underline{L}_I = p\underline{L}_1 \begin{bmatrix} 1 & \underline{w}_1^T \underline{E}_s^T \\ \underline{E}_s \underline{w}_1 & \underline{E}_s \underline{w}_1 \underline{w}_1^T \underline{E}_s^T \end{bmatrix}, \quad \frac{\underline{D}_I}{p} = \frac{1}{pC_1} \begin{bmatrix} 1 & \underline{w}_1^T \underline{E}_s^T \\ \underline{E}_s \underline{w}_1 & \underline{E}_s \underline{w}_1 \underline{w}_1^T \underline{E}_s^T \end{bmatrix},$$

so können diese mit

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \underline{E}_s \underline{w}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{w} \end{bmatrix} = \underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{w} \quad (\underline{w} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \vdots \\ w_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n-r}) \quad (2.146)$$

wie folgt vereinfachend geschrieben werden:

$$p\underline{L}_I = p\underline{L}_1 (\underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{w}) (\underline{E}_{n1}^T + \underline{w}^T \underline{F}_{n,n-1}^T), \quad (2.147a)$$

$$\frac{\underline{D}_I}{p} = \frac{1}{pC_1} (\underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{w}) (\underline{E}_{n1}^T + \underline{w}^T \underline{F}_{n,n-1}^T). \quad (2.147b)$$

Entsprechend den Gln. (2.125 a, b) erhält man die neue Impedanzmatrix $\underline{Z}_2$ als Summe entweder von $\underline{Z}_1$ und $p\underline{L}_I$ (Fall a)) oder von $\underline{Z}_1$ und $\underline{L}_I/p$ (Fall b))¹⁾

$$a) \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 + p\underline{L}_1 (\underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{w}) (\underline{E}_{n1}^T + \underline{w}^T \underline{F}_{n,n-1}^T),$$

also:

$$\underline{Z}_{n,2}(j\omega_0) = 0, \quad \underline{Z}_{21,2}(j\omega_0) = jF_s \underline{m}_1. \quad (2.148a)$$

$$b) \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 + \frac{1}{pC_1} (\underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{w}) (\underline{E}_{n1}^T + \underline{w}^T \underline{F}_{n,n-1}^T),$$

also:

$$\underline{Z}_{n,2}(j\omega_0) = 0, \quad \underline{Z}_{21,2}(j\omega_0) = jF_s \underline{m}_1. \quad (2.148b)$$

Damit sind die Voraussetzungen gegeben, um den Grad von $\underline{Z}_2$ zu reduzieren, der seinerseits um eins größer ist als der von $\underline{Z}_1$. Wir bilden dazu nach dem Muster von Gl. (2.121) die Gyration $\underline{H}_2 = \underline{\Gamma}_1(\underline{Z}_2)$, wobei in Gl. (2.121) $\underline{Z}_{11,1}$, $\underline{Z}_{21,1}$ und $\underline{Z}_{22,1}$ sinngemäß durch $\underline{Z}_{11,2}$, $\underline{Z}_{21,2}$ und $\underline{Z}_{22,2}$ zu ersetzen sind. Die Hybridmatrix $\underline{H}_2$ läßt sich dann wegen Satz 19 wie folgt aufspalten:

$$\underline{H}_2 = \frac{\underline{P}_{\omega_0}}{p - j\omega_0} + \frac{\underline{P}_{-\omega_0}}{p + j\omega_0} + \underline{H}_3 \quad (2.149a)$$

1) Zur Realisierung von $\underline{Z}_1$ nach den Gln. (2.148 a, b) sei z.B. auf Satz 10 und Bild 2¹ verwiesen.

Unter Verwendung der entsprechenden Darstellung von $1/Z_{11,2}$

$$\frac{1}{Z_{11,2}} = \frac{K/2}{p-j\omega_0} + \frac{K/2}{p+j\omega_0} + Y_{11,3} \quad (K > 0)$$

berechnet man das Polresiduum $\underline{P}_{\omega_0}$ als

$$\begin{aligned} \underline{P}_{\omega_0} &= \underline{H}_2(p)(p-j\omega_0)|_{p=j\omega_0} = \frac{K}{2} \left[\frac{1}{j\underline{F}_s \underline{m}_1} \right] \begin{bmatrix} 1 & -j\underline{m}_1^T \underline{F}_s^T \\ j\underline{F}_s \underline{m}_1 & \underline{F}_s \underline{m}_1 \underline{m}_1^T \underline{F}_s^T \end{bmatrix} \\ &= \frac{K}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j\underline{m}_1^T \underline{F}_s^T \\ j\underline{F}_s \underline{m}_1 & \underline{F}_s \underline{m}_1 \underline{m}_1^T \underline{F}_s^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.149b)$$

Mit $\underline{P}_{\omega_0}$ ist nach Satz 18, Gln.(1.27 a,b) auch das Residuum $\underline{P}_{(-\omega_0)}$ bekannt:

$$\underline{P}_{(-\omega_0)} = \frac{K}{2} \begin{bmatrix} 1 & j\underline{m}_1^T \underline{F}_s^T \\ -j\underline{F}_s \underline{m}_1 & \underline{F}_s \underline{m}_1 \underline{m}_1^T \underline{F}_s^T \end{bmatrix} \quad (2.149c)$$

Nach Einsetzen der beiden Residuen in Gl.(2.149 a) erhält man

$$\underline{H}_2 = \frac{K}{p^2 + \omega_0^2} \begin{bmatrix} p & \omega_0 \underline{m}_1^T \underline{F}_s^T \\ -\omega_0 \underline{F}_s \underline{m}_1 & p \underline{F}_s \underline{m}_1 \underline{m}_1^T \underline{F}_s^T \end{bmatrix} + \underline{H}_3 = \underline{H}_q + \underline{H}_3. \quad (2.150)$$

Nach den Überlegungen des letzten Abschnitts sind $\underline{H}_q$ und $\underline{H}_3$ Hybridmatrizen. Der Grad von $\underline{H}_3$ ist um zwei geringer als der Grad von $\underline{Z}_2$ bzw. $\underline{H}_2$.

Am Ende des vorangegangenen Abschnitts wurde neben Fall b) noch ein weiterer Fall b') des Duffin'schen Verfahrens entwickelt mit dem Ziel, wie in Fall a) eine struktursymmetrische Schaltung mit nur $n - 1$ idealen Übertragern zu gewinnen (Bilder 45, 48). Diese Absicht verfolgen wir auch hier und beschränken uns daher im weiteren auf die Diskussion der Fälle a) und b') (nach der Terminologie von Abschn. II.3.2.). Die zu Fall a) gehörige Aufspaltung von $\underline{H}_2$ ist in Gl.(2.150) angegeben; für Fall b') hingegen gilt - mit $\underline{H}_q$ und $\underline{H}_3$ nach Gl.(2.150) -

$$\underline{H}_2 = (\underline{H}_q + \underline{H}_3) + (\underline{H}_3 - \underline{H}_3) = \underline{H}_q^{(1)} + \underline{H}_3^{(1)}. \quad (2.151a)$$

Wir wählen speziell

$$\underline{H}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{K}{\omega_0} \underline{m}_1^T \underline{F}_s^T \\ \frac{K}{\omega_0} \underline{F}_s \underline{m}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.151b)$$

und erhalten nach Substitution von $\underline{H}_S$ in Gl. (2.151 a)

$$\underline{H}_2 = \frac{\kappa}{p^2 + \omega_0^2} \begin{bmatrix} p & -\frac{p^2}{\omega_0^2} \underline{m}_1^T \underline{F}_3^T \\ \frac{p^2}{\omega_0^2} \underline{F}_3 \underline{m}_1 & p \underline{F}_3 \underline{m}_1 \underline{m}_1^T \underline{F}_3^T \end{bmatrix} + \underline{H}_3^{(1)} = \underline{H}_q^{(1)} + \underline{H}_3^{(1)} \quad (2.151c)$$

Die Schaltungen zu $\underline{H}_q$ und $\underline{H}_q^{(1)}$ bestimmt man anhand der zugehörigen Impedanzmatrizen $\underline{Z}_q$ bzw. $\underline{Z}_q^{(1)}$, d.h. der Gyrationen $\Gamma_1(\underline{H}_q)$ bzw. $\Gamma_1(\underline{H}_q^{(1)})$.

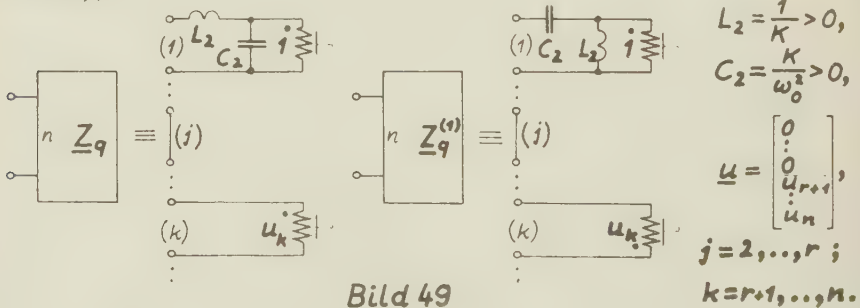
$$a) \quad \underline{Z}_q = \frac{p}{\kappa} \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T + \frac{\omega_0^2}{\kappa p} (\underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{u}) (\underline{E}_{n1}^T + \underline{u}^T \underline{F}_{n,n-1}^T) \quad (2.152a)$$

$$b) \quad \underline{Z}_q^{(1)} = \frac{p}{\kappa} (\underline{E}_{n1} - \underline{F}_{n,n-1} \underline{u}) (\underline{E}_{n1}^T - \underline{u}^T \underline{F}_{n,n-1}^T) + \frac{\omega_0^2}{\kappa p} \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T \quad (2.152b)$$

Hierbei wurde folgende Schreibweise verwendet:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\kappa}{\omega_0^2} \underline{F}_3 \underline{m}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{u} \end{bmatrix} = \underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{u} \quad (\underline{u} = -\frac{\kappa}{\omega_0^2} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \underline{m}_{r,r} \\ \vdots \\ \underline{m}_n \end{bmatrix}) \quad (2.153)$$

Aus diesen Matrixdarstellungen kann man ohne weiteres die Reaktanz-n-Tore konstruieren, die $\underline{Z}_q$ bzw. $\underline{Z}_q^{(1)}$ realisieren (Bild 49).



Die Schaltung für $\underline{H}_2$ ergibt sich als die - an früherer Stelle näher beschriebene - Parallelreihenkombination der abgebildeten n-Torschaltungen und der zu $\underline{H}_3$ bzw. zu $\underline{H}_3^{(1)}$ gehörigen n-Tore. Was die zuletzt genannten Matrizen betrifft, so hat den Ausführungen des vorangegangenen Abschnitts zufolge $\underline{H}_3$ bei $p = \infty$, $\underline{H}_3^{(1)}$ bei $p = 0$ eine G-Stelle, die sich von der jeweiligen n Gyration $\underline{Z}_3$ bzw. $\underline{Z}_3^{(1)}$ als Pol abspalten läßt. Drückt man $\underline{H}_3$ bzw. $\underline{H}_3^{(1)}$ durch die Teilmatrizen von $\underline{Z}_2$ und $\underline{H}_q$ bzw. $\underline{H}_q^{(1)}$ aus, so ergibt sich das entsprechende Polresiduum aus einer

Grenzwertbestimmung von $\underline{H}_3$ bzw. $\underline{H}_3^{(1)}$ an der jeweiligen G-Knullstelle.

$$a) \underline{H}_3(p) = \underline{H}_2(p) - \underline{H}_q(p) \quad (2.154a)$$

Aus Gl.(2.147 a) ergibt sich als Gyration von $\underline{Z}_2$

$$\underline{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_{11,1} + pL_1} & - \frac{\underline{Z}_{12,1}^T + pL_1 \underline{W}_1^T \underline{E}_s^T}{\underline{Z}_{11,1} + pL_1} \\ \frac{\underline{Z}_{21,1} + pL_1 \underline{E}_s \underline{W}_1}{\underline{Z}_{11,1} + pL_1} & \underline{Z}_{22,1} + pL_1 \underline{E}_s \underline{W}_1 \underline{W}_1^T \underline{E}_s^T - \frac{(\underline{Z}_{21,1} + pL_1 \underline{E}_s \underline{W}_1)(\underline{Z}_{12,1}^T + pL_1 \underline{W}_1^T \underline{E}_s^T)}{\underline{Z}_{11,1} + pL_1} \end{bmatrix} \quad (2.154b)$$

Aus Gl.(2.149) findet man

$$\underline{H}_q(p) = \frac{K}{p^2 + \omega_o^2} \begin{bmatrix} p & \omega_o \underline{m}_1^T \underline{F}_s^T \\ -\omega_o \underline{F}_s \underline{m}_1 & p \underline{F}_s \underline{m}_1 \underline{m}_1^T \underline{F}_s^T \end{bmatrix} \quad (2.154c)$$

Beim Grenzübergang $p \rightarrow \infty$ nimmt $\underline{H}_3$ nach Gl.(2.154 a) mit den Gl'n. (2.154 b,c) die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \underline{H}_3(p)|_{p \rightarrow \infty} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{pL_1} - \frac{K}{p} & -\underline{W}_1^T \underline{E}_s^T \\ \underline{E}_s \underline{W}_1 & \underline{H}_{22,3}(\infty) \end{bmatrix}, \\ \underline{H}_{22,3}(\infty) &= \left[\underline{E}_s \underline{W}_1 \mid \underset{n-1}{1} \right] \underline{Z}_1(\infty) \begin{bmatrix} \underline{W}_1^T \underline{E}_s^T \\ \underset{n-1}{1} \end{bmatrix} \neq \infty \end{aligned} \right\} \quad (2.155a)$$

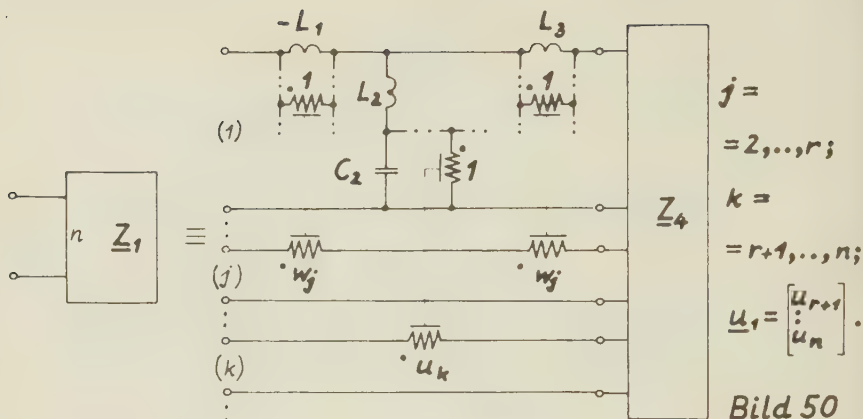
an. Entsprechendes gilt für $\underline{Z}_3 = \Gamma_1(\underline{H}_3)$:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_3(p)|_{p \rightarrow \infty} &= pL_3(\underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{W})(\underline{E}_{n1}^T + \underline{W}^T \underline{F}_{n,n-1}^T) \\ (L_3 = \frac{L_1}{1 - KL_1} = \frac{L_1 L_2}{L_2 - L_1} > 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.155b)$$

Mit der Abspaltung des Poles gemäß der Gleichung

$$\underline{Z}_3(p) = pL_3(\underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{W})(\underline{E}_{n1}^T + \underline{W}^T \underline{F}_{n,n-1}^T) + \underline{Z}_4(p)$$

ist ein Entwicklungszyklus beendet. $\underline{Z}_4$ ist im Grad gegenüber $\underline{Z}_3$ um eins, gegenüber $\underline{Z}$ und $\underline{Z}_1$ um insgesamt zwei verringert worden. Die Beweise dafür, daß $\underline{Z}_4$ Impedanzmatrix und L_3 positiv ist, können genauso wie im vorangegangenen Abschnitt geführt und demzufolge hier weggelassen werden. Das Ergebnis eines vollständigen Entwicklungszyklus ist die Schaltung für $\underline{Z}_1$ in Bild 50.



Der aus Gl.(2.155 b) abzulesende Zusammenhang

$$-\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} = 0 \quad (2.156)$$

spielt bei der Äquivalenten Umformung des Reaktanz-2n-Tors in Bild 50 in eine realisierbare Schaltung eine wesentliche Rolle. Diese Transformation wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

$$b) \underline{H}_3^{(n)} = \underline{H}_2 - \underline{H}_q^{(n)} \quad (2.157a)$$

Entsprechend zu Fall a) findet man zunächst $\underline{H}_2$ und $\underline{H}_q^{(1)}$ aus Gl. (2.147 b) bzw. Gl.(2.152):

$$\underline{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{n,1} + \frac{1}{pC_1}} & -\frac{Z_{21,1} + \frac{1}{pC_1} \underline{w}_1^T \underline{E}_s^T}{Z_{n,1} + \frac{1}{pC_1}} \\ \frac{Z_{21,1} + \frac{1}{pC_1} \underline{E}_s \underline{w}_1}{Z_{n,1} + \frac{1}{pC_1}} & -\frac{Z_{22,1} + \frac{1}{pC_1} \underline{E}_s \underline{w}_1 \underline{w}_1^T \underline{E}_s^T - (Z_{21,1} + \frac{1}{pC_1} \underline{E}_s \underline{w}_1)(Z_{21,1} + \frac{1}{pC_1} \underline{w}_1^T \underline{E}_s^T)}{Z_{n,1} + \frac{1}{pC_1}} \end{bmatrix} \quad (2.157b)$$

$$\underline{H}_q^{(1)} = \frac{K}{p^2 + \omega_0^2} \begin{bmatrix} p & -\frac{p^2}{\omega_0} \underline{m}_1^T \underline{F}_s^T \\ \frac{p^2}{\omega_0} \underline{F}_s \underline{m}_1 & p \underline{F}_s \underline{m}_1 \underline{m}_1^T \underline{F}_s^T \end{bmatrix} \quad (2.157c)$$

Der Grenzübergang $p \rightarrow 0$ führt für $\underline{H}_3^{(1)}$ auf

$$\left. \begin{aligned} \underline{H}_3^{(1)}(p)|_{p \rightarrow 0} &= \begin{bmatrix} pC_1 - p\frac{K}{\omega_0^2} & -\underline{w}_1^T \underline{E}_s^T \\ \underline{E}_s \underline{w}_1 & \underline{H}_{22,3}(0) \end{bmatrix} \\ \underline{H}_{22,3}(0) &= [\underline{E}_s \underline{w}_1 \quad \underline{1}_{n-1}] \underline{Z}_1(0) \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \underline{E}_s^T \\ \underline{1}_{n-1} \end{bmatrix} \neq \infty \end{aligned} \right\} \quad (2.158a)$$

und für $\underline{Z}_3^{(1)} = \Gamma_1(\underline{H}_3^{(1)})$ auf

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_3^{(n)}(p)|_{p \rightarrow 0} &= \frac{1}{pC_3} (\underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{w}) (\underline{E}_{n1}^T + \underline{w}^T \underline{F}_{n,n-1}^T) \\ (C_3 = C_1 - \frac{K}{\omega_0^2} = C_1 - C_2 > 0) \end{aligned} \right\} (2.158b)$$

Mit dem Abbau dieses Poles ist der Entwicklungszyklus beendet:

$$\underline{Z}_3^{(n)}(p) = \frac{1}{pC_3} (\underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{w}) (\underline{E}_{n1}^T + \underline{w}^T \underline{F}_{n,n-1}^T) + \underline{Z}_4^{(n)}(p)$$

Für $\underline{Z}_4^{(1)}$ gelten die weiter oben im Fall a) gemachten Aussagen.

Die Positivität von C_3 bedarf ebenfalls keines weiteren Hinweises. Die Schaltung für $\underline{Z}_1$ im Fall b') zeigt Bild 51.

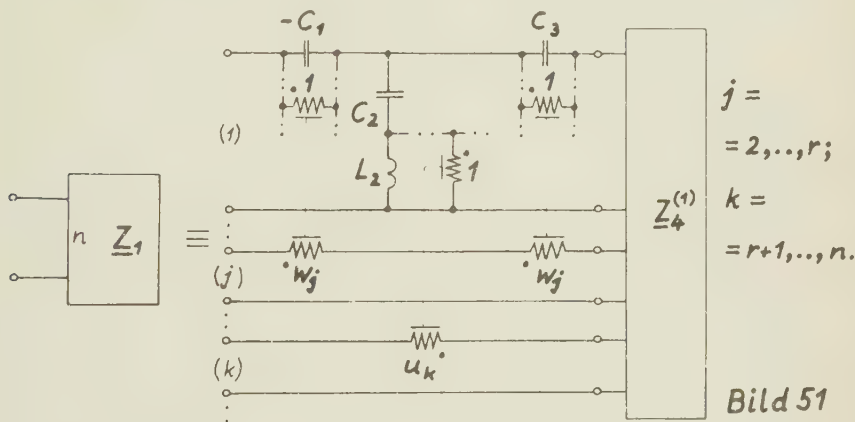


Bild 51

Wegen der äquivalenten Umformung des Reaktanz-2n-Tores in Bild 51 wird auf den nächsten Abschnitt verwiesen. Ähnlich wie bei Fall a) wird sie ermöglicht durch die Gültigkeit der in Gl. (2.158 b) enthaltenen Beziehung

$$-C_1 + C_2 + C_3 = 0 \quad (2.159)$$

Wir halten fest, daß die Schaltungen des Originalverfahrens von Duffin in Abschn. II.3.2. (Bilder 45, 48) durch $r = 1$ gekennzeichnete Sonderfälle der Schaltungen der obigen 1. Varianten (Bilder 50, 51) darstellen. Es genügt infolgedessen, bei den Äquivalenztransformationen im nächsten Abschnitt nur die Schaltungen der 1. Varianten zu betrachten.

11.3.3.2. Die zweite Variante

Gegeben sei wieder die Impedanzmatrix $\underline{Z}_1$, die aus der ursprünglich vorliegenden Matrix $\underline{Z}$ durch die Kongruenztransformation Gl.(2.114) entsteht. Außerdem sei - für $\omega_0 \neq 0, \infty$ - die Gl. (2.115) erfüllt¹⁾. Der nachfolgend zu beschreibenden Modifikation des Luffin'schen Verfahrens liegt der Gedanke zugrunde, daß ein Entwicklungszyklus ebensogut mit der Gyration von $\underline{Z}_1$ - sie sei $\underline{H}_1$ genannt - begonnen werden kann wie mit der Impedanzmatrix $\underline{Z}_1$ selbst. Infolge der oben angeführten Voraussetzungen gilt nämlich für das erste Diagonalelement von $\underline{H}_1$ die der Gl.(2.115) entsprechende Beziehung

$$\operatorname{Re} H_{11}(j\omega_0) = 0.$$

Diese Gleichung bildet den Ausgangspunkt für den anschließenden Entwicklungszyklus.

Von den nunmehr wohlbekannten zwei Fällen

$$a) Z_{11}(j\omega_0) = -j\omega_0 L, \quad (L > 0), \quad (2.160)$$

$$b') Z_{11}(j\omega_0) = \frac{1}{-j\omega_0 C}, \quad (C > 0)$$

beschränken wir uns auf den ersteren. Das Verfahren für Fall b') läßt sich dann nach bekanntem Muster aus demjenigen für Fall a) ableiten. Da der Entwicklungszyklus gleich in der allgemeinen Form, d.h. für $r > 1$ besprochen werden soll, muß $\underline{Z}_{21,1}$ gemäß Gl. (2.144 a) partitioniert werden:

$$\underline{Z}_{21,1} = \underline{E}_s \underline{Z}_{21,1}^{(n)} + \underline{F}_s \underline{Z}_{21,1}^{(2)} \quad (2.161)$$

$\underline{Z}_{21,1}$ ist bei $p = j\omega_0$ bekanntlich imaginär; wir schreiben daher zweckmäßig

$$\underline{Z}_{21,1}(j\omega_0) = -j\omega_0 L (\underline{E}_s \underline{w}_1 + \underline{F}_s \underline{u}_1). \quad (2.162)$$

$\underline{E}_s$, $\underline{F}_s$, $\underline{u}_1$ und $\underline{w}_1$ bedeuten die in Abschn. 11.3.3.1. erklärten Matrizen und Vektoren. Die Gyration von $\underline{Z}_1$ lautet mit Gl.(2.161)

$$\Gamma_1(\underline{Z}_1) = \underline{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{E}_s \underline{Z}_{21,1}^{(n)} + \underline{F}_s \underline{Z}_{21,1}^{(2)} \end{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_{11,1}} \begin{bmatrix} 1 & -\underline{Z}_{21,1}^{(n)T} \underline{E}_s^T \\ -\underline{Z}_{21,1}^{(2)T} \underline{F}_s^T & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{22,1} \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

¹⁾ Für die Gl. $\omega_0 = 0, \infty$ vgl. das in Abschn. 11.3.3.1. Gesagte.

Unter Verwendung von Gl. (2.164) bilden wir die Reaktanzhybridmatrix

$$\underline{H}_{L1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{pL_1} & \underline{w}_1^T \underline{E}_s^T \\ -\underline{E}_s \underline{w}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.164)$$

und addieren sie zu $\underline{H}_1$. Wie man leicht erkennt, hat die so gebildete Summe

$$\underline{H}_2 = \underline{H}_1 + \underline{H}_{L1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{n,1}} + \frac{1}{pL_1} & -\frac{\underline{Z}_{21,1}^T \underline{E}_s^T + \underline{Z}_{n,1}^T \underline{E}_s^T}{Z_{n,1}} + \underline{w}_1^T \underline{E}_s^T \\ \frac{\underline{E}_s \underline{Z}_{21,1} + \underline{E}_s \underline{Z}_{2n,1}}{Z_{n,1}} & -\underline{E}_s \underline{w}_1 \quad \underline{Z}_{22,1} - \frac{\underline{Z}_{21,1} \underline{Z}_{21,1}^T}{Z_{n,1}} \end{bmatrix} \quad (2.165)$$

wegen der Gln. (2.160), (2.162) bei $p = j\omega_0$ die Form

$$\underline{H}_2(j\omega_0) = \begin{bmatrix} 0 & -\underline{u}_1^T \underline{E}_s^T \\ \underline{E}_s \underline{u}_1 & \underline{H}_{22,2}(j\omega_0) \end{bmatrix}, \quad \underline{H}_{22,2} = \underline{Z}_{22,1} - \frac{\underline{Z}_{21,1} \underline{Z}_{21,1}^T}{Z_{n,1}} \quad (2.166)$$

Nach Gl. (2.166) besitzen außer $\underline{H}_{11,2}$ auch die nächsten $r-1$ Elemente der ersten Zeile und Spalte von $\underline{H}_2$ je eine Nullstelle bei $p = j\omega_0$. Die Summe $\underline{H}_2 = \underline{H}_1 + \underline{H}_{L1}$ läßt sich auch als Abspaltung der Matrix $-\underline{H}_{L1}$ von $\underline{H}_1$, also als Differenz $\underline{H}_1 - (-\underline{H}_{L1})$ auffassen. Man kann $\underline{H}_1$ dann unter Zuhilfenahme von Satz 19 schaltungsmäßig interpretieren, wie in Bild 52 gezeigt.

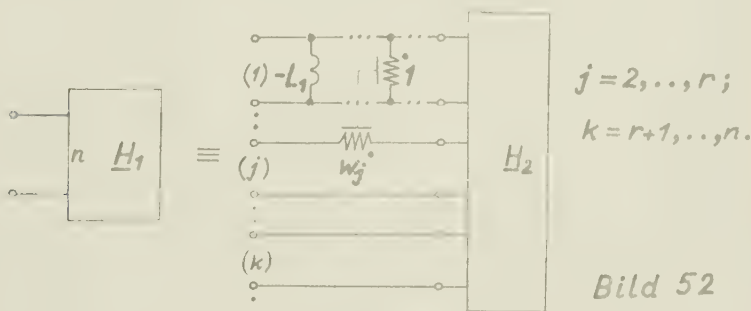


Bild 52

Nach der beschriebenen Schaffung einer G-Nullstelle von $\underline{H}_2$ - womit auch die Erhöhung des Grades um eins verbunden war - sind die Voraussetzungen für eine Gradreduktion durch Polabbau gegeben. Die Gyration von $\underline{H}_2$,

$$\Gamma_1(H_2) = \underline{Z}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\underline{E}_S \underline{Z}_{21,1}^{(1)} + \underline{F}_S \underline{Z}_{21,1}^{(2)}}{\underline{Z}_{n,1}} \\ -\underline{E}_S \underline{W}_1 \end{bmatrix} - \frac{\underline{Z}_{n,1} p L_1}{\underline{Z}_{n,1} + p L_1} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\underline{Z}_{21,1}^{(1)T} \underline{E}_S^T + \underline{Z}_{21,1}^{(2)T} \underline{F}_S^T}{\underline{Z}_{n,1}} - \underline{W}_1^T \underline{E}_S^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{H}_{22,2} \end{bmatrix}, \quad (2.167a)$$

kann mit der Zerlegung von $\underline{Z}_{11,2} = \underline{Z}_{11,1} p L_1 / (\underline{Z}_{11,1} + p L_1)$

$$\underline{Z}_{n,2} = \frac{K/2}{p - j\omega_0} + \frac{K/2}{p + j\omega_0} + \underline{Z}_{n,3} \quad (K > 0, \underline{Z}_{n,3}(\pm j\omega_0) \neq \infty)$$

in analog zerlegter Form als die Summe

$$\underline{Z}_2(p) = \frac{\underline{P}_0}{p - j\omega_0} + \frac{\underline{P}_0}{p + j\omega_0} + \underline{Z}_3(p) = \frac{2p \underline{P}_0}{p^2 + \omega_0^2} + \underline{Z}_3 \quad (2.167b)$$

beschrieben werden (Satz 10, Gl.(1.14)). $\underline{Z}_3$ ist Impedanzmatrix und bei $p = \pm j\omega_0$ polfrei. Das Residuum $\underline{P}_0$ ergibt sich aus Gl. (2.167 a) mit Gl.(2.153) zu

$$\underline{P}_0 = \frac{K}{2} (\underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{u}) (\underline{E}_{n1}^T + \underline{u}^T \underline{F}_{n,n-1}^T), \quad \underline{u} = \underline{F}_S \underline{u}_1. \quad (2.167c)$$

It $\underline{P}_0$ folgt aus Gl.(2.167 b)

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{1}{p C_2 + \frac{1}{p L_2}} (\underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{u}) (\underline{E}_{n1}^T + \underline{u}^T \underline{F}_{n,n-1}^T) + \underline{Z}_3 \\ &= \underline{Z}_L + \underline{Z}_3 \quad (C_2 = \frac{1}{K} > 0, L_2 = \frac{K}{\omega_0^2} > 0). \end{aligned} \quad (2.167d)$$

Die Realisierung von $\underline{Z}_2$ kann - von den geänderten Werten der Schaltelemente abgesehen - direkt von Bild 2 (Satz 10) übernommen werden. Wir wollen unsere Aufmerksamkeit daher auf $\underline{Z}_3$ lenken. Diese Matrix hat infolge des Polabbaus nach Gl.(2.167 d) einen um zwei geringeren Grad als $\underline{Z}_2$. Zusätzlich besitzt $\underline{Z}_3$ - wie man sich leicht überzeugt - eine Nullstelle bei $p = 0$. Betrachtet man nämlich das Verhalten von $\underline{Z}_3 = \underline{Z}_2 - \underline{Z}_1$ - mit $\underline{Z}_2$ aus Gl.(2.167 a) - in der Umgebung von $p = 0$, so erhält man bei Verwendung der in Gl.(2.146) definierten Schreibweise

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3(p) &= p L_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\underline{Z}_{21,1}(0)}{\underline{Z}_{n,1}(0)} - \underline{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\underline{Z}_{21,1}^T(0)}{\underline{Z}_{n,1}(0)} - \underline{W}^T \end{bmatrix} - \\ &\quad - p L_2 (\underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{u}) (\underline{E}_{n1}^T + \underline{u}^T \underline{F}_{n,n-1}^T). \end{aligned} \quad (2.168a)$$

Eine entsprechende Grenzwertbetrachtung der Gyration $\underline{H}_3 = \Gamma_1(\underline{Z}_3)$ führt zu dem Ausdruck

$$\Gamma_1(\underline{Z}_3)|_{p \rightarrow 0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p(L_1 - L_2)} & \underline{w}_1^T \underline{E}_s^T \\ -\underline{E}_s \underline{w}_1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\underline{Z}_{21,1}(0)}{\underline{Z}_{11,1}(0)} L_1 + \frac{\underline{Z}_{21,1}(j\omega_0)}{\underline{Z}_{11,1}(j\omega_0)} L_2 \\ \frac{\underline{Z}_{21,1}(0)}{\underline{Z}_{11,1}(0)} L_1 - \frac{\underline{Z}_{21,1}(j\omega_0)}{\underline{Z}_{11,1}(j\omega_0)} L_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.168b)$$

$\Gamma_1(\underline{Z}_3)$ besitzt also den aufgrund von Satz 33 zu erwartenden Pol bei $p = 0$. Die obige Aufspaltung in zwei Summanden ist so erfolgt, daß die linke H-Matrix mit Ausnahme des Wertes der Induktivität mit $\underline{H}_{L1}$ identisch ist. Diese Maßnahme ist für die spätere äquivalente Umformung der Schaltung von Bedeutung. Macht man Gebrauch von der abkürzenden Schreibweise für Gl.(2.168 b)

$$\Gamma_1(\underline{Z}_3)|_{p \rightarrow 0} = \underline{H}_3(p)|_{p \rightarrow 0} = \underline{H}_{L3} + \underline{H}_s,$$

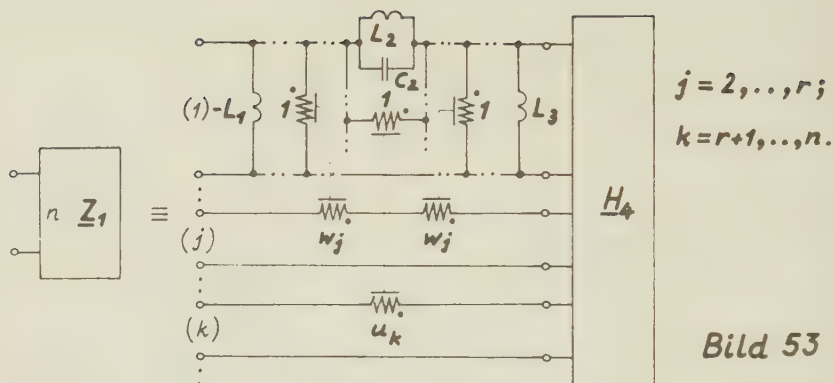
wobei $\underline{H}_{L3}$ den linken, $\underline{H}_s$ den rechten Summanden in Gl.(2.168 b) bedeuten, so läßt sich die Abspaltung des Poles bei $p = 0$ durch die Zerlegung

$$\underline{H}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{pL_3} & \underline{w}_1^T \underline{E}_s^T \\ -\underline{E}_s \underline{w}_1 & 0 \end{bmatrix} + (\underline{H}_s + \underline{H}_4^{(n)}) \quad (L_3 = L_1 - L_2) \quad (2.169)$$

veranschaulichen, in der $\underline{H}_4 = \underline{H}_4^{(1)} + \underline{H}_s$ eine im Grad gegenüber $\underline{H}_3$ um eins, und gegenüber $\underline{Z}_1$ um zwei verringerte Hybridmatrix darstellt. Die Induktivität ist aus früher erörterten Gründen positiv.

An dieser Stelle ist ein Entwicklungszyklus der 2.Varianten abgeschlossen; die daraus resultierende Schaltung zeigt Bild 53. Wegen Gl.(2.169) gilt der - für die spätere äquivalente Umformung bedeutsame - Zusammenhang

$$-L_1 + L_2 + L_3 = 0. \quad (2.170)$$



Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß man in Bild 53 lediglich pL_1 durch $1/(pC_1)$ ($i = 1, 2, 3$) und pC_2 durch $1/(pL_2)$ zu ersetzen hat, um die Schaltung für den - an früherer Stelle erwähnten, jedoch nicht behandelten - Fall b') zu erhalten. Dann gilt offenbar für die C_1 ($i = 1, 2, 3$) der der Gl.(2.170) entsprechende Zusammenhang

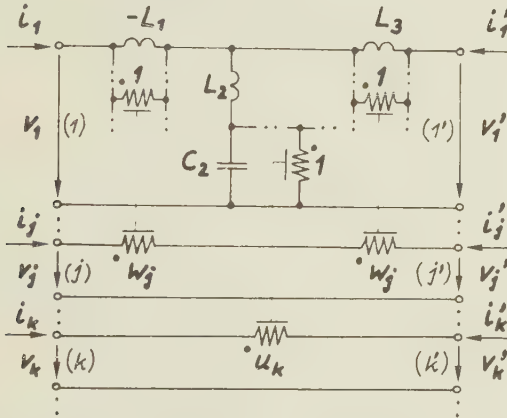
$$-\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = 0. \quad (2.171)$$

11.3.4. Äquivalenztransformation der in Abschn. 11.3.3. gewonnenen Reaktanzschaltungen

Die oben beschriebenen Verfahren haben - nach einem Entwicklungszyklus - für Z_1 Schaltungen geliefert, die jeweils aus einer an n Toren mit einem allgemeinen n -Tor abgeschlossenen und nicht realisierbaren Reaktanzschaltung mit $2n$ Klemmenpaaren bestehen. Diese Netzwerke werden hier in eine realisierbare und zudem kanonische Form überführt. Die hierzu notwendigen Matrixtransformationen und die zugehörigen schaltungsmäßigen Maßnahmen verlaufen wie in Abschn. 11.2.4. beschrieben. So genügt hier im wesentlichen die Wiedergabe ihrer Ergebnisse. Die Existenz der Gln.(2.156), (2.159), (2.170), (2.171) garantiert die Positivität der Reaktanzen in den transformierten Schaltungen. Weiterhin wird gezeigt, daß sich die so gewonnenen Schaltungen durch eine weitere Transformation in eine Gestalt bringen lassen, die - bis auf ein nachgeschaltetes Übertrager- $2n$ -Tor - in

allen vier in Betracht kommenden Fällen die gleiche Struktur besitzen.

1) Variante 1a); Bild 50.



$$j, j' = 2, \dots, r; \\ k, k' = r+1, \dots, n.$$

Bild 54

Um eine möglichst knappe Darstellung zu ermöglichen, führen wir die Vektoren

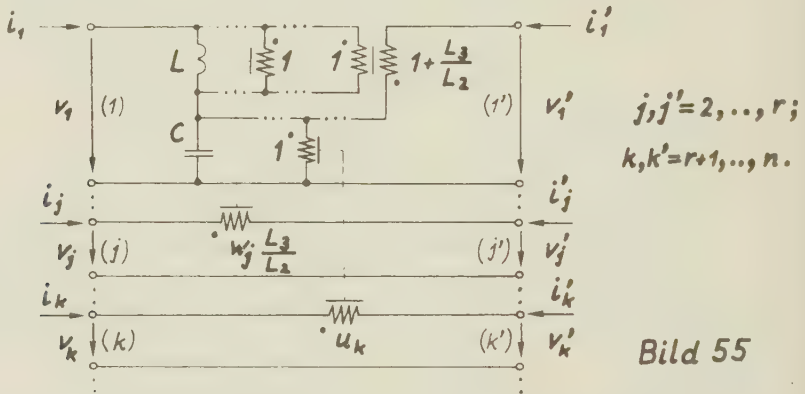
$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \underline{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}, \quad \underline{v}' = \begin{bmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix}, \quad \underline{i}' = \begin{bmatrix} i'_1 \\ \vdots \\ i'_n \end{bmatrix} \quad (2.172)$$

ein. Zudem verwenden wir die in den Gln.(2.146), (2.153) definierten $(n-1)$ -Vektoren $\underline{u}$ und $\underline{w}$. Wir führen eine Analyse der Schaltung in Bild 54 durch, als deren Ergebnis wir eine Hybriddarstellung nach dem Vorbild etwa von Gl.(2.93) anstreben. Man partitioniert daher die Vektoren $\underline{v}$, $\underline{v}'$, $\underline{i}$ und $\underline{i}'$ gemäß Gl.(2.92) und wählt den aus $\underline{v}'$, v_1 und $\underline{i}_2$ gebildeten $2n$ -Vektor als linksseitigen Vektor der Hybridbeziehung, die damit folgende Gestalt hat:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}' \\ v_1 \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pL\underline{u}_L\underline{u}_L^T + \frac{1}{pC}\underline{u}_C\underline{u}_C^T & pL\underline{u}_L + \frac{1}{pC}\underline{u}_C F_{n,n-1} \\ pL\underline{u}_L^T + \frac{1}{pC}\underline{u}_C^T & pL + \frac{1}{pC} \\ -F_{n,n-1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}' \\ i_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.173a)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{u}_L &= E_{n1}(1 + \frac{L_3}{L_2}) + \frac{L_3}{L_2} F_{n,n-1} \underline{w}, \quad \underline{u}_C = E_{n1} + F_{n,n-1} \underline{u}, \\ L &= L_2 - L_1 > 0, \quad C = C_2 > 0. \end{aligned} \right\} (2.173b)$$

Die obige Hybridmatrix wird gemäß Gl.(1.27) in drei Terme zerlegt, die einzeln realisiert werden, und deren Reihenparallel-schaltung (Satz 17) die H-Matrix verwirklicht.¹⁾ Berücksichtigt man noch, daß in den Vektoren $\underline{u}_L$ und $\underline{u}_C$ $n - r$ bzw. $r - 1$ von den jeweils n Komponenten verschwinden, so findet man schließlich die in Bild 55 angezeigte, äquivalente Form zu der Schaltung in Bild 54.



1) Variante 1b'); Bild 51. Da man die Schaltung in Bild 51 aus derjenigen in Bild 50 erhält, indem man die Substitutionen

$$\left. \begin{aligned} pL_i &\longrightarrow \frac{1}{pC_i} \\ \frac{1}{pC_2} &\longrightarrow pL_2 \\ u &\longrightarrow -u \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3), \quad (2.174)$$

durchführt, ergibt sich wie bei Variante 1a) die Gleichung mit der Nummer (2.173 a) als zugehörige Hybridbeziehung, in der aber aufgrund der obigen Substitutionen die Schaltelemente L , C und die Vektoren $\underline{u}_L$, $\underline{u}_C$ wie folgt erklärt sind:

$$\left. \begin{aligned} \underline{u}_L &= \underline{E}_{n1} - \underline{F}_{n,n-1}\underline{u} \quad , \quad \underline{u}_C = (1 + \frac{C_2}{C_3})\underline{E}_{n1} + \frac{C_2}{C_3}\underline{F}_{n,n-1}\underline{u} \quad , \\ L &= L_2 > 0 \quad , \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 - C_2} > 0 \quad . \end{aligned} \right\} (2.173c)$$

Die äquivalente Schaltung finden wir bei Anwendung der Regeln (2.174) auf die Schaltung in Bild 55; das Ergebnis ist in Bild 56 dargestellt.

1) Einzelheiten hierzu vgl. Abschn. II.2.4.

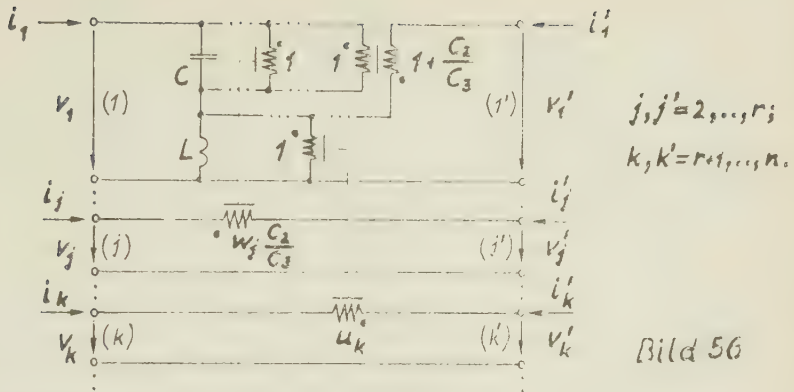


Bild 56

3) Variante 2a); Bild 53.

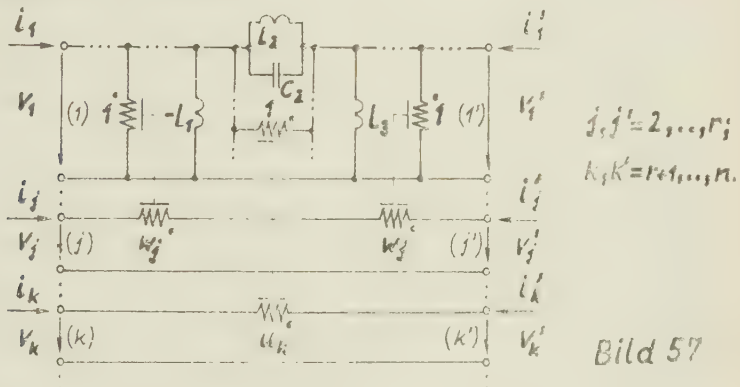


Bild 57

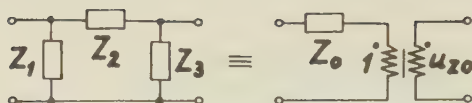
Die vorliegende Schaltung läßt sich ohne weiteres durch eine realisierbare ersetzen, wenn man Gl.(2.170) in der nachfolgend demonstrierten Weise als Vierpoläquivalenz interpretiert.

$$Z_i = pL_i \text{ (oder } \frac{1}{pC_i}, R_i) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Die drei Impedanzen mögen der folgenden Beziehung genügen:

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0 \quad (2.175)$$

Je eines der Elemente L_1 bzw. C_1, R_1 sei negativ, die anderen positiv. Unter diesen Voraussetzungen sind die beiden Vierpole in Bild 58 äquivalent. Mit der Realisierbarkeit des rechten Vierpols ist das Ziel der Äquivalenztransformation erreicht.

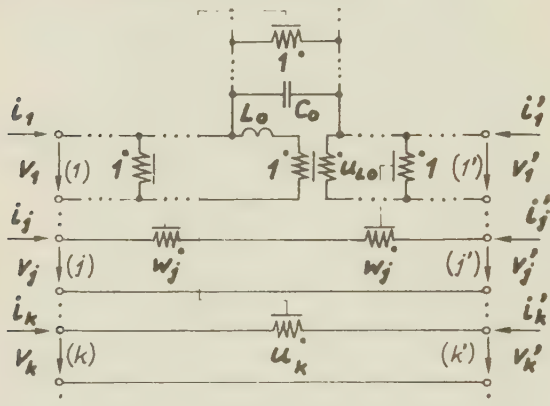


$$Z_0 = -\frac{Z_1 Z_2}{Z_3}$$

$$u_{20} = -(1 + \frac{Z_2}{Z_1})$$

Bild 58

Wendet man diese Umformung speziell auf den durch die drei Induktivitäten $-L_1, L_2, L_3$ gebildeten Vierpol in Bild 57 an, dann bekommt man die nunmehr realisierbare Form des Netzwerks in Bild 59, darstellt in Bild 59.



$$L_0 = \frac{L_1 L_2}{L_3}$$

$$C_0 = C_2$$

$$u_{L0} = -1 + \frac{L_2}{L_1}$$

$$j, j' = 2, \dots, r;$$

$$k, k' = r+1, \dots, n.$$

Bild 59

Die Analyse dieser Schaltung führt - bei Verwendung der in Gl. (2.172) definierten Vektoren - auf die in Matrizenform geschriebenen Hybridbeziehungen

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_2^T \\ \underline{i}_1' \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{w} + \underline{u} & (\underline{w} - \underline{u}) \underline{E}_{n,1}^T + \underline{F}_{n,n-1} \\ -\underline{w}^T - \underline{u}^T & pC_0 + \frac{1}{pL_0} & -(pC_0 + \frac{1}{u_{L0} pL_0}) \underline{E}_{n,1}^T \\ \underline{E}_m (-\underline{w}^T + \underline{u}^T) - \underline{F}_{n,n-1} & -(pC_0 + \frac{1}{u_{L0} pL_0}) \underline{E}_{n,1} & (pC_0 + \frac{1}{u_{L0} pL_0}) \underline{E}_{n,1} \underline{E}_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_2^T \\ \underline{v}_1' \\ \underline{v} \end{bmatrix} \quad (2.176)$$

Im Hinblick auf den eingangs erwähnten zweiten Teil dieses Abschnitts bringen wir das Gleichungssystem (2.176) durch zweimalige Teilinversion in die Form von Gl. (2.173 a). In der Terminologie von Satz 30 haben wir die Gyration

$$\underline{H}^{(1)} = \underline{\Gamma}_n (\underline{\Gamma}_{n+1} (\underline{H}))$$

zu bilden, wobei $\underline{H}$ die H-Matrix in Gl. (2.176) bedeutet. Als Ergebnis der Umrechnung erhalten wir

$$\begin{bmatrix} \underline{v}' \\ \underline{v}_1 \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pL\underline{u}_1\underline{u}_1^T + \frac{1}{pC}\underline{u}_c\underline{u}_c^T & pL\underline{u}_1 + \frac{1}{pC}\underline{u}_c & F_{n,n-1} \\ pL\underline{u}_1^T + \frac{1}{pC}\underline{u}_c^T & pL + \frac{1}{pC} & 0 \\ -F_{n,n-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}' \\ \underline{i}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} \quad (2.177a)$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_L &= E_{n1} + 2F_{n,n-1}W, \quad \underline{u}_C = \frac{1}{u_{c0}}E_{n1} + F_{n,n-1}\left(\frac{W+u}{u_{c0}} + W - u\right), \\ L &= L_0\left(\frac{u_{c0}}{1-u_{c0}}\right)^2, \quad C = C_0\left(\frac{1-u_{c0}}{u_{c0}}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.177b)$$

4) Variante 2b'), Wie bei den Varianten 1a) und 1b') erhält man auch hier aus der Schaltung in Bild 57, die den Ausgangspunkt für die äquivalente Umformung bei Variante 2a) bildete, mit Hilfe der Substitutionen

$$\left. \begin{aligned} pLi &\longrightarrow \frac{1}{pCi} \\ \frac{1}{pCi} &\longrightarrow pLi \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3), \quad (2.178)$$

die dem Fall 2b') entsprechende Schaltung. Ihre Umformung in ein realisierbares Netzwerk erfolgt in der bereits für Fall 2a) dargestellten Weise. Gl.(2.177 a) stellt auch für dieses 2n-Ior die Hybridbeziehung dar, wenn man die Elemente L, C und die Vektoren $\underline{u}_L$, $\underline{u}_C$ aufgrund der obigen Substitutionen statt durch Gl.(2.177b) durch die folgenden Beziehungen erklärt:

$$\left. \begin{aligned} \underline{u}_C &= E_{n1} + 2F_{n,n-1}W, \quad \underline{u}_L = \frac{1}{u_{c0}}E_{n1} + F_{n,n-1}\left(\frac{W+u}{u_{c0}} + W - u\right), \\ C &= C_0\left(\frac{1-u_{c0}}{u_{c0}}\right)^2, \quad L = L_0\left(\frac{u_{c0}}{1-u_{c0}}\right)^2, \quad C_0 = \frac{C_1C_2}{C_3}, \quad L_0 = L_2, \quad u_{c0} = -1 + \frac{C_1}{C_2} \end{aligned} \right\} (2.177c)$$

Wir sehen, daß für sämtliche transformierten Schaltungen die gemeinsame Hybriddarstellung

$$\begin{bmatrix} \underline{v}' \\ \underline{v}_1 \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pL\underline{u}_1\underline{u}_1^T + \frac{1}{pC}\underline{u}_c\underline{u}_c^T & pL\underline{u}_1 + \frac{1}{pC}\underline{u}_c & F_{n,n-1} \\ pL\underline{u}_1^T + \frac{1}{pC}\underline{u}_c^T & pL + \frac{1}{pC} & 0 \\ -F_{n,n-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}' \\ \underline{i}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} \quad (2.179)$$

gilt; die Bedeutung der Elemente L, C und der Vektoren $\underline{u}_L$, $\underline{u}_C$ ist für jeden der vier Fälle den Gln.(2.173 b,c), (2.177 b,c) zu entnehmen. Es ist nun - im Hinblick auf die Ausführbarkeit einer Schaltung - wünschenswert, daß diese möglichst wenige ideale Übertrager benötigt. Mit Hilfe einer letzten hybriden

Kongruenztransformation werden wir zeigen, daß man die Hybridmatrix $\underline{H}$ in Gl.(2.179) durch die Kettenschaltung zweier $2n$ -Tore realisieren kann, von denen das vorgeschaltete außer einer Induktivität, einer Kapazität und festgekoppelten Übertragern entweder keinen (falls $u_{c1} = 1$; also bei den Varianten 1a) und 2b')), oder nur einen idealen Übertrager (falls $u_{c1} \neq 1$; also bei den Varianten 1b') und 2a)) enthält. Das nachgeschaltete $2n$ -Tor besteht nur aus idealen Übertragern und kann - da vom Grad Null - in die Schaltung von $\underline{Z}_4$ einbezogen werden.

Mit der Transformationsmatrix

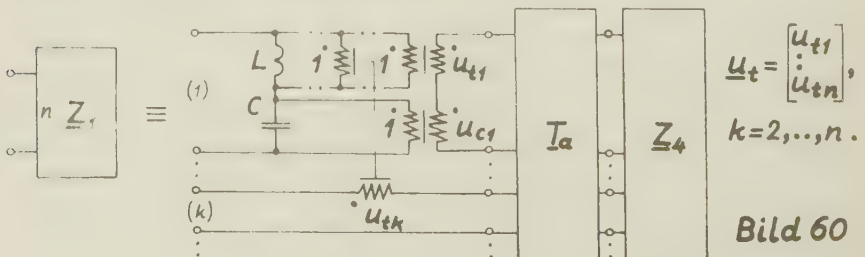
$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 1_n - \frac{1}{u_{c1}} \underline{E}_{n1} u_{c2} \underline{E}_{n,n-1}^T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.180)$$

und der Hybridmatrix $\underline{H}$ aus Gl.(2.179) ergibt sich die transformierte Matrix

$$\underline{H}^{(1)} = \underline{T}^T \underline{H} \underline{T} = \begin{bmatrix} pL \underline{u}_t \underline{u}_t^T + \frac{u_{c1}^2}{pC} \underline{E}_{n1} \underline{E}_{n1}^T & pL \underline{u}_t + \frac{u_{c1}}{pC} \underline{E}_{n1} & \underline{F}_{n,n-1} \\ pL \underline{u}_t^T + \frac{u_{c1}}{pC} \underline{E}_{n1}^T & pL + \frac{1}{pC} & 0 \\ -\underline{F}_{n,n-1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.181)$$

$$\underline{u}_t = u_{c1} \left\{ \underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \left(\frac{u_{c1}}{u_{c1}} - \frac{u_{c2}}{u_{c1}} \right) \right\}.$$

Unter Bezugnahme auf Satz 29 und Bild 7 erkennen wir, daß sich $\underline{H}$ als Kettenschaltung der zu $\underline{H}^{(1)}$ und $\underline{T}_a$ gehörenden Mehrtore realisieren läßt. Dabei beschreibt $\underline{T}_a$ bekanntlich ein nur aus idealen Übertragern bestehendes $2n$ -Tor, während $\underline{H}^{(1)}$ nach den Überlegungen von Abschn.11.2.4.1. verwirklicht werden kann. Man erhält schließlich in allen vier Verfahrensvarianten für die zu realisierende Impedanzmatrix $\underline{Z}_1$ die nachstehend abgebildete, einheitliche Schaltung.



Da in Bild 60 entweder u_{t1} oder u_{c1} gleich eins ist, fällt in jedem Falle einer der beiden entsprechenden Übertrager weg. Das durch T_a charakterisierte Netzwerk kann in das allgemeine n-Tor für Z_4 einbezogen werden. Die dadurch entstehende neue Impedanzmatrix $Z_4^{(1)} = (T_a^T)^{-1} Z_4 T_a^{-1}$ (Satz 27 und Bild 4) bildet den Ausgangspunkt für den nächsten Entwicklungszyklus.

11.3.5. Eine alternative Methode der Realteilabspaltung und Anwendungsmöglichkeiten

In den Syntheseprozessen von Tellegen [4] und McMillan [5] wird jeder Entwicklungsschritt mit einer Realteilabspaltung dergestalt eingeleitet, daß die Realteilmatrix der so reduzierten Impedanzmatrix auf der imaginären Achse zwar pol bleibt, aber wenigstens eine Nullstelle - z.B. bei $p = j\omega_0$ - aufweist. Wir hatten gesehen, daß diese Methoden auch bei der Vorbereitung des Duffin-Prozesses angewendet werden können. Es war hier jedoch i.a. erforderlich, durch eine Kongruenztransformation der realteilreduzierten Matrix die für die Anwendung des Verfahrens notwendigen Voraussetzungen zu schaffen. Lemzufolge war der gesamte Bedarf an idealen Übertragern beim eben geschilderten Vorgehen genausogroß wie bei Tellegen [4], nämlich $2n - 1$ bei einer Gradreduktion um zwei. Die nachstehend beschriebene Methode der Realteilabspaltung, deren Anwendung immer im Zusammenhang mit einer der vier Varianten des Duffin'schen Syntheseverfahrens erfolgen soll, besitzt gegenüber den eben erwähnten zwei Vorteile. Erstens sind nach ihrer Anwendung keine weiteren Vorbereitungen für das Duffin'sche Verfahren nötig, und zweitens ermöglicht sie - wenigstens in bestimmten Sonderfällen - die Einsparung idealer Übertrager. Ihr entscheidender Nachteil gegenüber den beiden anderen Methoden [4,5] ist jedoch, daß sie nicht in jedem Fall anwendbar ist.

Zunächst sei der prinzipielle Verlauf der Realteilreduktion geschildert. Wir betrachten den Realteil der gegebenen Impedanzmatrix Z , $\operatorname{Re} Z(p)$, auf der imaginären Achse:

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) = \underline{R}(\omega) = [R_{ik}(\omega)] \quad (i, k = 1, \dots, n) \quad (2.182)$$

Für eines der Diagonalelemente, z.B. für $R_{11}(\omega)$, bestimmen wir das Minimum; es trete bei $\omega = \omega_0$ auf und habe den Wert

$$\text{Min}(R_H(\omega)) = R_H(\omega_0) = R > 0. \quad (2.183a)$$

$\underline{R}_{21}(\omega)$ sei der Vektor, der aus allen Elementen der ersten Spalte von $\underline{R}(\omega)$ - mit Ausnahme von $R_{11}(\omega)$ - gebildet ist. Wir berechnen dann für die Minimumfrequenz ω_0 den Wert von $\underline{R}_{21}$; mit R nach Gl.(2.183 a) schreiben wir

$$\underline{R}_{21}(\omega_0) = R \underline{u}_R \quad (\underline{u}_R = [u_{R2}, \dots, u_{Rn}]^T, \text{ reell}). \quad (2.183b)$$

Subtrahiert man das aus R , $\underline{u}_R$ gebildete dyadische Produkt

$$\underline{R}_r = R(\underline{E}_{n1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{u}_R)(\underline{E}_{n1}^T + \underline{u}_R^T \underline{F}_{n,n-1}^T) \quad (2.183c)$$

gemäß der Beziehung

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z} - \underline{R}_r \quad (2.184)$$

von der Impedanzmatrix $\underline{Z}$, so erfüllt der Realteil von $\underline{Z}_1$, $\text{Re } \underline{Z}_1(p)$, die durch die Gln.(2.115), (2.120 a) formulierten Bedingungen. Es ist jedoch ohne weiteres einzusehen, daß $\text{Re } \underline{Z}_1$ auf der imaginären Achse nicht mehr notwendig psd zu sein braucht, da hierauf bei der Berechnung von $\underline{R}_r$ keine Rücksicht genommen wurde. Die Abspaltung ist demnach nur dann zulässig, wenn der Realteil von $\underline{Z}_1$ auf der imaginären Achse psd und damit $\underline{Z}_1$ selbst PHN ist. Durch dieses Kriterium wird die Anwendbarkeit der Methode eingeschränkt. Bild 61 veranschaulicht die beschriebene Realteilreduktion als Schaltung.

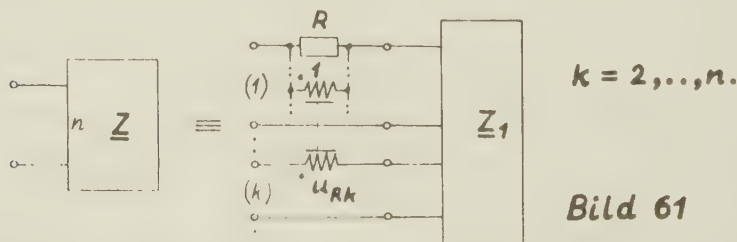


Bild 61

Die Methode läßt sich für den Fall des Vierpols ($n = 2$) unter einer bestimmten Voraussetzung so variieren, daß die Realteilabspaltung von $\underline{Z}$ ohne idealen Übertrager verwirklicht werden kann. Gelten nämlich für $\underline{R}_{21}(\omega_0)$ bzw. $\underline{u}_R$ - beide sind nun Skalare - nach Gl.(2.183 b) die Einschränkungen

$$0 \leq R_{21}(\omega_0) = u_R R \leq R \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq u_R \leq 1, \quad (2.185a)$$

so kann $\underline{R}_r$ in die Summe

$$\begin{aligned} \underline{R}_r &= \left(\begin{bmatrix} R(1-u_R) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + u_R R \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R u_R (u_R - 1) \end{bmatrix} \\ &= \underline{R}_r^{(1)} + \underline{R}_r^{(2)} \end{aligned} \quad (2.1851)$$

zerlegt werden, in der die beiden ersten Terme, also $\underline{R}_r^{(1)}$, positiv definit, der dritte Term $\underline{R}_r^{(2)}$ aber negativ ist. Die Abspaltung wird nun - statt nach Gl.(2.184) - in der Reihen-

$$\underline{Z}_1^{(1)} = \underline{Z}_1 + \underline{R}_r^{(2)} = \underline{Z} - \underline{R}_r^{(1)} \quad (2.186)$$

vollzogen, und kann wie folgt realisiert werden:

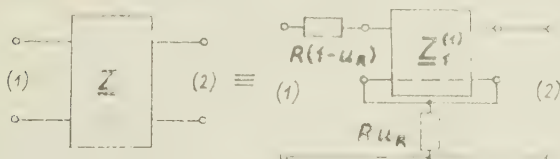


Bild 62

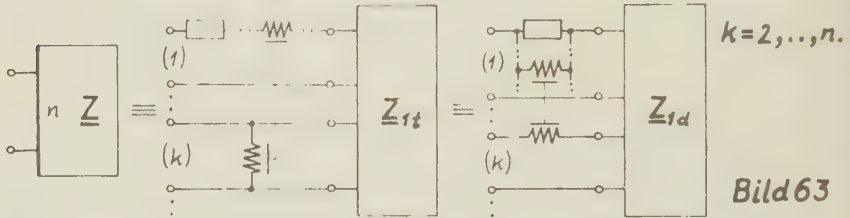
Die Reihenschaltung in Bild 62 kommt deshalb ohne ideale Übertrager aus, weil beide beteiligten Vierpole erdunsymmetrisch sind [20].

Was die Zulässigkeit anbelangt, so ist in dieser Hinsicht die zuletzt vorgestellte Methode sicher kritischer als die vorherige, da der Realteil von $\underline{Z}$ durch die Subtraktion von $\underline{R}_r^{(1)}$ gemäß Gl. (2.186) stärker vermindert wird als durch die Subtraktion von $\underline{R}_r$ gemäß Gl.(2.184).

Eine Erweiterung dieser variierten Methode auf Mehrterme mit einer Torzahl $n > 2$ ist aus zwei Gründen nicht möglich. Zunächst lassen sich nur für $n \leq 3$ hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß sich eine konstante (n,n) -Matrix als Impedanzmatrix ein n -Tors verwirklichen läßt, welches nur aus ohmschen Widerständen besteht [7,21]. Daher kann für größere Werte von n keine der Matrix $\underline{R}_r^{(1)}$ (Gl.(2.186)) entsprechende Matrix konstruiert werden, die den abzubauenen Realteil kennzeichnet. Zum anderen sind die ohmschen Netzwerke, die es für $\underline{R}_r^{(1)}$ im Falle n gibt, nicht erdunsymmetrisch, so daß für deren Reihenschaltung mit dem Dreitor für $\underline{Z}_1^{(1)}$ (vgl. Bild 62) i.e. zwei ideale Übertrager benötigt werden [20].

Anschließend werden einige Anwendungsmöglichkeiten der beiden - speziell auf das Duffin'sche Verfahren und seine Varianten zugeschnittenen- Methoden der Realteilreduktion erörtert.

Als erstes sei auf die fast selbstverständliche Tatsache hingewiesen, daß die neue Art der Realteilabspaltung eine neue Klasse äquivalenter Schaltungen erschließt. Als Erläuterung hierzu möge Bild 63 dienen, in welchem zwei äquivalente Schaltungen einer Impedanzmatrix $\underline{Z}$ einander gegenübergestellt sind. Das linke n-Tor veranschaulicht die Realteilabspaltung nach Tellegen [4] mit anschließender Kongruenztransformation nach Gl. (2.114), das rechte die neue Art der Realteilabspaltung.



Natürlich ergeben sich bei der anschließenden Gradverminderung der realteilreduzierten Matrizen $\underline{Z}_{1t}$ und $\underline{Z}_{1d}$ unterschiedliche Werte der Schaltelemente, auch wenn jeweils dasselbe Syntheseverfahren hierzu eingesetzt wird.

Weitere Anwendungsmöglichkeiten eröffnet die variierte Abspaltmethode, charakterisiert durch die Gln. (2.185 a), (2.186), bei Vierpolen im Hinblick auf die Ersparnis idealer Übertrager. Um Schaltungen mit möglichst wenigen idealen Übertragern zu bekommen, geht man bei der Realisierung einer Vierpolimpedanzmatrix etwa folgendermaßen vor. Zur Realteilabspaltung am Anfang eines Entwicklungszyklus setzt man - falls Bedingung (2.185 a) erfüllt und die Frage nach der Zulässigkeit positiv beantwortet ist - so oft wie möglich die Übertragersparende Methode ein. Bei der anschließenden Gradreduktion von $\underline{Z}_1$ muß - je nach Vorzeichen von $Z_{11,1}(j\omega_0)$ - Variante 1a) oder 2b') des Duffin-Verfahrens benutzt werden, die nach Bild 60 wegen $u_{C1} = 1$ ohne ideale Übertrager auskommen. Man gelangt so zu einer Schaltung, die sicher weniger oder höchstens gleich viele Übertrager enthält wie alle anderen bekannten kanonischen Schaltungen. Bild 64

zeigt als Beispiel eine Schaltung, die zu einer Impedanzmatrix vom Grad vier gehört. Man sieht, daß vor dem zweiten Entwicklungszyklus die Übertragersparende Methode zur Realteilabspaltung angewendet wurde, und daß der Vierpol infolgedessen einen Übertrager weniger als z.B. die Schaltung nach Tellegen [4] enthält.

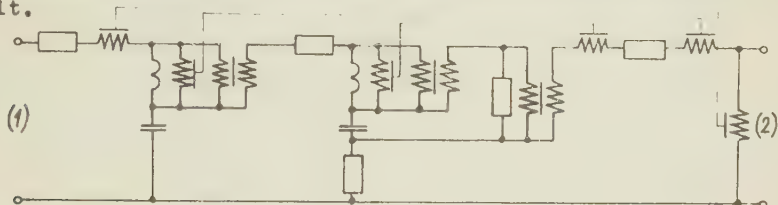


Bild 64

Eine grundsätzlich andere Möglichkeit, zu Übertragerarmen Schaltungen einer Vierpolmatrix $\underline{Z}$ zu gelangen, wird auf den nächsten Seiten beschrieben. Die Einsparung idealer Übertrager geschieht nicht - wie oben - während des Realisierungsprozesses, sondern wird an einer fertigen Realisierung von $\underline{Z}$ vorgenommen. Man erhält diese durch die wiederholte Anwendung eines Verfahrens auf $\underline{Z}$, das aus der Realteilabspaltmethode der Gln. (2.183 c), (2.184) und je einer der Varianten 1a) oder 2b') des Duffin-Prozesses kombiniert ist. Nehmen wir an, daß bei sämtlichen Entwicklungszyklen jeweils $\omega_0 \neq 0, \infty$ ist¹⁾, so erhält man den nachstehend abgebildeten Vierpol.

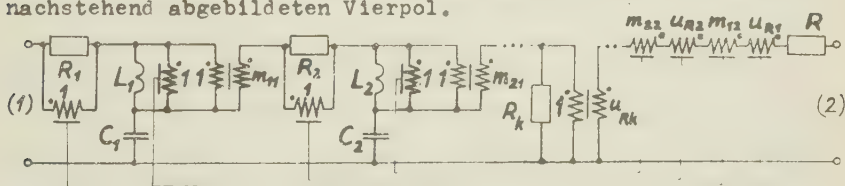


Bild 65

Diese Vierpolschaltung - ein Spezialfall des allgemeinen n-Tors, welches man ebenfalls mit Hilfe der oben erwähnten Verfahrenskombination entwickeln kann - wurde von Lüder als Ergebnis eines langwierigen und hauptsächlich topologischen Verfahrens gefunden [19]. Während jedoch bei Lüder der Widerstand R in Bild 65

1) Die Einbeziehung der Fälle $\omega_0 = 0, \infty$ erschwert die Überlegungen nicht, macht aber - hier unwesentliche - Fallunterscheidungen nötig.

negativ werden kann, sind hier alle Schaltelemente positiv, da bei den Realteilabsplattungen jeweils Zulässigkeit vorausgesetzt wurde.

In dem Vierpol von Bild 65 liegt parallel zu jedem Widerstand R_1 ($i = 1, \dots, k$) ein idealer Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis u_{R1} , das i.a. jeden reellen Wert annehmen kann. Von diesen k Übertragern besitzen k_p positive und $k_n = k - k_p$ negative Übersetzungsverhältnisse. Dann gilt mit $k_m = \max(k_p, k_n)$ sicher $k_m \geq k/2$. Zur einfacheren Unterscheidung in den weiteren Ausführungen sollen die beiden Möglichkeiten mit

Fall 1. $k_p \geq k_n$, d.h. $k_m = k_p$; und

Fall 2. $k_p < k_n$, d.h. $k_m = k_n$

bezeichnet werden.

Lüder zeigt in der oben genannten Arbeit [19], wie man mit Hilfe eines zusätzlichen idealen Übertragers k_m der Widerstands-Übertrager eliminieren kann, falls $R > 0$ gilt. Sein Verfahren weist den entscheidenden Mangel auf, daß in der Übertragerarmen Schaltung ein Ohm-Widerstand negativ werden kann, ohne daß eine Voraussage darüber möglich ist. Wir gehen hier zur Herleitung dieser Äquivalenz einen anderen Weg, der kürzer ist und zudem ausschließlich positive Schaltelemente für die Übertragerarme Schaltung garantiert.

Die Behauptung lautet also: Die Ersparnis von k_m Übertragern ist genau dann möglich, wenn sich für u_0 die Gleichung

$$R - \sum_{k_m} |u_{Ri}| (u_0 - |u_{Ri}|) R_i = 0 \quad (2.187a)$$

erfüllen läßt, wobei für u_0 die Ungleichung

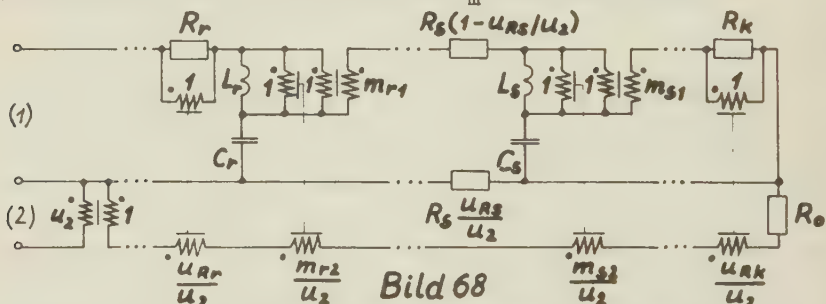
$$u_0 \geq \max |u_{Ri}| \quad (2.187b)$$

gilt. Die Summe in Gl. (2.187 a) ist im Fall 1 über alle positiven, im Fall 2 über alle negativen u_{R1} zu erstrecken. Die Zahl $\max |u_{R1}|$ stellt das Betragsmaximum aller positiven (Fall 1) bzw. aller negativen u_{R1} (Fall 2) dar.

Diese Behauptung beweisen wir wie folgt. Parallel zu Tor (2) in Bild 65 wird ein idealer (1:1)-Übertrager geschaltet. Die Vierpoleigenschaften ändern sich nicht, wenn man in der dadurch galvanisch völlig entkoppelten Masche das Widerstandsniveau um

$$0 \leq \frac{u_{Rj}}{u_2} \leq 1 \quad (2.189)$$

gilt. Wir betrachten dann den Teilvierpol in Bild 66 b (er ist gemäß Bild 65 zu ergänzen), der alle Entwicklungszyklen vom Index j an aufwärts enthält, und dann offenbar das Aussehen des Vierpols in Bild 67 ganz links hat. Dabei sind $\underline{Z}_1$, u_{R1} , R_1 und $R^{(1)}$ sinngemäß durch $\underline{Z}_j$, u_{Rj}/u_2 , R_j und R/u_2^2 zu ersetzen. Die Eliminierung des Übertragers verläuft dann wie in Bild 67. Das Verfahren wird für denjenigen nächstniedrigen Index $i = j - h_1$ wiederholt, für den Ungl.(2.189) gilt, u.s.f. Nach der Äquivalenztransformation aller weiteren - im Sinne von Ungl.(2.189) - geeigneten Teilvierpole ist die zum Gesamtvierpol in Bild 65 Äquivalente Schaltung (Bild 68) um k_m Übertrager ärmer.



In Bild 68 ist diese Schaltung in typischen Ausschnitten dargestellt. Die Indizes r, s kennzeichnen den jeweiligen Entwicklungszyklus. Für den Restwiderstand R_o aus Bild 68 ergibt sich

$$R_o = \frac{1}{u_2^2} \left\{ R - \sum_{k_m} |u_{Ri}| (|u_2| - |u_{Ri}|) R_i \right\}. \quad (2.190a)$$

Bezüglich der Summe gilt das für Gl.(2.187 a) Gesagte. Mit dieser Gleichung läßt sich R_o auch durch die Beziehung

$$R_o = \frac{u_o - |u_2|}{u_2^2} \sum_{k_m} |u_{Ri}| R_i \quad (2.190b)$$

ausdrücken, aus der mit den Ungln.(2.188 a,b) $R_o \geq 0$ hervorgeht.

Man macht sich leicht klar, daß eine Übertragerersparnis in geringerem Ausmaße auch dann möglich ist, wenn die Gln.(2.187a), (2.187 b) nicht gelten. Es läßt sich nämlich wegen $R > 0$ mit Sicherheit eine Zahl $u_1 > 0$ angeben, die ein ähnliches, weniger allgemeines Gleichungspaar

$$u_i \geq \max |u_{ri}|, \quad i = \begin{cases} \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p < k_p; u_{ri} > 0 \\ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n < k_n; u_{ri} < 0 \end{cases} \quad (2.191a)$$

$$R - \sum_{k_r} |u_{ri}| (u_i - |u_{ri}|) R_i = 0, \quad k_r = \begin{cases} \nu_p; u_{ri} > 0 \\ \mu_n; u_{ri} < 0 \end{cases} \quad (2.191b)$$

erfüllt. Von den zwei Möglichkeiten ist i.a. die vorzuziehen, bei der die Zahl der betreffenden u_{ri} größer ist, für die also mit anderen Worten k_r maximal ist.

Die sinngemäße Anwendung der oben vorgeführten Schaltungsumformung gestattet die Einsparung von $k_r < k_m$ Übertrassern. Für das Übersetzungsverhältnis u_2 des zusätzlichen Übertrassers (Bild 66) gelten jetzt die Einschränkungen

$$u_i \geq u_2 \geq \max u_{ri} \quad (i = \nu_1, \dots, \nu_p), \quad (2.192a)$$

$$u_i \geq -u_2 \geq \max |u_{ri}| \quad (i = \mu_1, \dots, \mu_n). \quad (2.192b)$$

Die Gln.(2.191 a,b), (2.192 a,b) garantieren, daß auch in diesem weniger allgemeinen Fall der Restwiderstand R_0 (vgl. Gln. (2.190 a,b)) positiv ist.

Wegen der Gültigkeit des Dualitätsprinzips haben wir uns in Teil II bisher auf Impedanzmatrizen beschränkt. Auf dem Gebiet der Übertrassersfreien Verwirklichung konstanter Immittanzmatrizen wird dieses Prinzip jedoch verletzt. Da das genannte Gebiet in diesen Abschnitt hereinreicht, sei noch kurz auf Admittanzmatrizen eingegangen.

Die Methode der Realteilreduktion gemäß den Gln.(2.183 c), (2.184) läßt sich zwar noch völlig dual für Admittanzmatrizen übernehmen. Wir schreiben dann

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y} - \underline{G}_r, \quad (2.193a)$$

wobei

$$\underline{G}_r = G(\underline{E}_{n,1} + \underline{F}_{n,n-1} \underline{u}_G)(\underline{E}_{n,1}^T + \underline{u}_G^T \underline{F}_{n,n-1}^T) \quad (\underline{u}_G = [\underline{u}_{G2}, \dots, \underline{u}_{Gn}]^T) \quad (2.193b)$$

gilt¹⁾. Die Abspaltung von $\underline{G}_r$ veranschaulicht Bild 69.

1) Für die Zulässigkeit der Abspaltung gelten entsprechende Überlegungen wie bei Impedanzmatrizen.

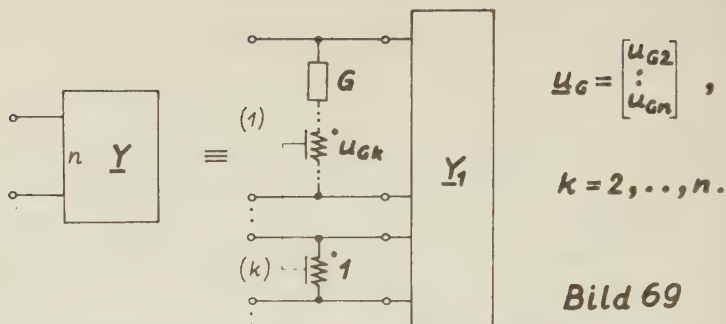


Bild 69

Ließ sich jedoch bei Impedanzmatrizen nur für den Fall $n = 2$ eine Übertragersparende Realteilabspaltmethode angeben, so ist dies hier für beliebiges n möglich. Aus $\underline{G}_r$ nach Gl.(2.193 b) läßt sich nämlich unter den zwei Voraussetzungen

$$u_{Gi} < 0 \quad (i = 2, \dots, n); \quad \sum_{i=2}^n |u_{Gi}| \leq 1 \quad (2.194 a)$$

eine konstante, dominante Leitwertmatrix $\underline{G}_r^{(1)}$ konstruieren, deren erste Zeile und Spalte von $\underline{G}_r$ übernommen werden, und in der außer den Diagonalelementen alle anderen Elemente negativ sind [21]. Diese Eigenschaften sind hinreichend dafür, daß $\underline{G}_r^{(1)}$ durch ein übertragerfreies, erdunsymmetrisches und aus höchstens $n(n+1)/2$ Widerständen bestehendes Netzwerk realisiert werden kann. Zur übertragerfreien Realteilabspaltung schreibt man

$$\underline{G}_r = \underline{G}_r^{(1)} + \underline{G}_r^{(2)}, \quad (2.194 b)$$

wobei $\underline{G}_r^{(2)}$ wegen der Dominanz von $\underline{G}_r^{(1)}$ nur vom Rang $n - 1$ ist. Dann vollzieht sich die Abspaltung, von deren Zulässigkeit man sich vorher überzeugen muß, nach der Beziehung

$$\underline{Y}_1^{(n)} = \underline{Y} - \underline{G}_r^{(n)} = \underline{Y}_1 + \underline{G}_r^{(2)}. \quad (2.195)$$

Die weitere Realisierung von $\underline{Y}_1^{(1)}$ nach der dualen Version des Luffin-Verfahrens bzw. einer seiner Varianten liefert ein erdunsymmetrisches n -Tor, das pro Entwicklungszyklus (d.h. bei einer Gradreduktion um zwei) $n - 1$ ideale Übertrager benötigt. Die Parallelschaltung der n -Tore für $\underline{Y}_1^{(1)}$ und für $\underline{G}_r^{(1)}$, die die Realisierung von $\underline{Y}$ darstellt, kommt wegen der Erdunsymmetrie beider Netzwerke ohne ideale Übertrager aus.

Nach den obigen Betrachtungen ist also bei der Entwicklung einer (n,n) -Admittanzmatrix $\underline{Y}$ in eine Schaltung im günstigsten Falle eine Ersparnis von $n - 1$ idealen Übertragern pro Entwicklungszyklus möglich, verglichen mit allen anderen bekannten kanonischen Realisierungsprozessen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß sowohl Impedanz- als auch Admittanzmatrizen zwar nicht allgemein, so doch unter bestimmten Voraussetzungen durch kanonische Schaltungen realisiert werden können, die weniger ideale Übertrager benötigen als die Schaltungen vergleichbarer Verfahren.

SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS

- [1] Bayard, M.: "Résolution du problème de la synthèse des réseaux de Kirchhoff par la détermination de réseaux purement réactifs"; Câbles et Transmission, vol. 4, S. 281 - 296; 1950
- [2] Oono, Y.: "Synthesis of a finite $2n$ -terminal network by a group of networks each of which contains only one ohmic resistance"; J. Math. Phys., vol. 29, S. 13 - 26; 1950
- [3] Bélévitch, V.: "Synthèse des réseaux électriques passifs à paires de bornes de matrice de répartition prédéterminée"; Ann. Télécommun., vol. 6, S. 302 - 312; 1951
- [4] Tellegen, B. D. H.: "Synthesis of $2n$ -poles by networks containing the minimum number of elements"; J. Math. Phys., vol. 32, S. 1 - 18; 1953
- [5] McMillan, B.: "Introduction to formal realizability theory"; Bell System Tech. J., vol. 31, S. 217 - 279, 541-600; 1952
- [6] Brune, O.: "Synthesis of a finite two-terminal network whose driving point impedance is a prescribed function of frequency"; J. Math. Phys., vol. 10, S. 191 - 236; 1931
- [7] Unbehauen, R.: "Neuartige Verwirklichung von Zweipolfunktionen durch kanonische oder durch kopplungsfreie Schaltungen"; Diss. T. H. Stuttgart; 1957
- [8] Newcomb, R. W.: "Linear multiport synthesis"; McGraw-Hill, New York; 1966
- [9] Bélévitch, V.: "On the algebraic structure of formal realizability theory"; Révue HF, vol. 8, S. 183 - 194; 1959
- [10] Weinberg, L. and Slepian, P.: "Realizability conditions on n -port networks"; IRE Transactions on Circuit Theory, vol. CT 5, S. 217 - 221; 1958
- [11] Yarlagadda, R. and Tokad, Y.: "Synthesis of n -port LC networks from the hybrid matrix"; Arch. el. Übertr., Band 20, 494 - 500; 1966
- [12] Sfin, R. J., Hazony, D. and Morrison, N.: "Network synthesis through hybrid matrices"; Seventh Midwest Symposium on Circuit Theory, Univ. of Michigan, S. 139 - 149; 1964

- [13] Cauer, W.: "Theorie der linearen Wechselstromschaltungen"; Becker und Erler, Leipzig; 1941
- [14] Youla, D. C.: "A new theory of cascade synthesis"; IRE Transactions on Circuit Theory, vol. CT 8, S. 244 - 260; 1961
- [15] Zurmühl, R.: "Matrizen"; Springer, Berlin; 1964
- [16] Cederbaum, I.: "On matrices of residues of the impedance or admittance matrices of n ports"; IRE Transactions on Circuit Theory, vol. 4, S. 20 - 21; 1957
- [17] Béliévitch, V.: "On the Brune process for n-ports"; IRE Transactions on Circuit theory, vol. 7, S. 280 - 296; 1960
- [18] Wunsch, G.: "Theorie und Anwendung linearer Netze"; Teil I, Geist und Portig, Leipzig; 1961
- [19] Lüder, E.: "Die Verwirklichung der Kettenmatrix des allgemeinen passiven Vierpols durch eine Schaltung mit der geringsten Zahl von Teilen"; Habilitationsschrift, T. H. Stuttgart; 1966
- [20] Klein, W.: "Grundlagen der Theorie elektrischer Schaltungen"; Akademie-Verlag, Berlin; 1961
- [21] Weinberg, L.: "Network analysis and synthesis"; McGraw-Hill, New York; 1962

LEBENS LAUF

Am 22. Sept. 1940 wurde ich, Eberhard Kienzle, als zweites Kind des Kaufmanns Gustav Kienzle und seiner Ehefrau Marta in Esslingen a. N. geboren. An den Besuch der Volksschule von 1947 bis 1951 schloß sich meine weitere schulische Ausbildung am Esslinger Georgii-Gymnasium an, wo ich im Frühjahr 1960 die Reifeprüfung ablegte. Nach einem sechsmonatigen Grundpraktikum begann ich das Studium der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Während der Semesterferien war ich als Fachpraktikant in Esslinger und Stuttgarter Unternehmen und bei der staatlichen französischen Energieversorgung in Dijon tätig. Im Herbst 1965 schloß ich mein Studium mit dem Diplom ab.

In der folgenden Zeit entstand die vorliegende Arbeit. Zunächst war ich zwei Jahre lang wissenschaftlicher Assistent am Institut für Theorie der Elektrotechnik der Technischen Hochschule Stuttgart. Seit dem 1. Dez. 1967 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik der Universität Erlangen-Nürnberg beschäftigt.

Erlangen, den 25. April 1969

